BCI-代数与半群

杨闻起 著



科学出版社

(O-4561.0101)

高等教育出版中心　数理出版分社
联系电话：010-64034725
E-mail:mph@mail.sciencep.com

www.sciencep.com



定价：35.00元

BCI-代数与半群

杨闻起　著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书是一本研究BCI-代数与群、半群、环和半环的关系的著作, 共有5章. 第1章是预备知识, 包括研究BCI-代数必备的代数基础知识; 第2章是BCI-代数的一般理论, 主要介绍该代数系统的基础理论; 第3章是BCI-代数与半群, 从不同的角度研究了BCI-代数与群和半群的关系, 包括作者多年从事BCI-代数研究的系列成果; 第4章是BCI-半群(IS-代数), 介绍了BCI-半群(IS-代数)的基础理论, 包括韩国田英培教授、西北大学辛小龙教授和作者的研究成果; 第5章是IS-代数与半环, 讨论了IS-代数与环和半环的关系, 主要是作者的研究成果.

本书适合大学教师和研究生阅读, 也可作为数学与计算机专业本科高年级学生的选修课教材.

图书在版编目(CIP)数据

BCI-代数与半群/杨闻起著. —北京: 科学出版社, 2011

ISBN 978-7-03-033027-7

Ⅰ. ①B… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①BCI代数-研究②半群-研究 Ⅳ. O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第260037号

责任编辑: 王 静 房 阳 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 张克忠 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
駿杰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011年12月第 一 版 开本: 720×1000 1/16
2011年12月第一次印刷 印张: 10 1/4
字数: 208 000
定价: 35.00元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

逻辑代数是信息科学、计算机科学、控制论和人工智能等许多领域的推理机制的代数基础. 随着模糊控制的广泛应用, 作为其理论基础的模糊逻辑和相关的逻辑代数也成为人们研究的热点.

1966 年, 由日本数学家 Y. Imai 和 K. Iséki 以逻辑运算为基础, 根据组合逻辑中组合子的代数表述, 提出了 BCK–代数和 BCI–代数. 1993 年, 韩国数学家田英培 (Young Bae Jun) 教授在 BCI–代数的基础上通过添加半群结构又引入了 BCI–半群 (简称 IS–代数). 与这些逻辑代数相比较, 传统的代数系统 (群、环) 最大的特点就是运算具有结合性, 即传统的代数系统都是结合代数. 而逻辑代数是基于逻辑运算引入的代数系统, 并不要求代数运算具有结合性, 所以逻辑代数都是非结合代数. 尽管逻辑代数与结合代数有明显的区别, 但现有的研究结果已经表明, 逻辑代数与结合代数有着紧密的联系.

从 BCI–代数的发展来看, 主要有以下几种方法研究 BCI–代数与结合代数的关系: 第一, 在 BCI–代数中寻找一些特殊类, 如 1980 年由胡庆平和 K.Iséki 引入的结合 BCI–代数、1983 年由雷天德引入的广义结合 BCI–代数和 1990 年由惠昌常引入的拟结合 BCI–代数. 由这些特殊的 BCI–代数类可直接得到群和半群. 第二, 作者从一般 BCI–代数的运算出发导出了另一种适合结合律的新运算, 从而由一般 BCI–代数得到半群. 第三, 1995 年, 黄文平借助于变换群的思想, 在一般 BCI–代数上寻找一些变换, 将这些变换关于变换的合成运算作成半群. 第四, 1993 年, 由田英培等通过在 BCI–代数上再添加一个半群结构而形成 BCI–半群, 并说明它是环概念的一般化.

本书的主线就是研究 BCI–代数与群和半群的关系问题, 特点如下:

第一, 在论述 BCI–代数理论时, 以作者的研究成果为基础, 通过引入一般 BCI–代数的加法序半群, 建立了一般 BCI–代数与序半群的关系, 以便读者体会逻辑代数与结合代数的紧密联系.

第二, 建立了 BCI–代数中元素的阶与群中元素的阶的对应关系, 得到了用元素的阶刻画 BCI–代数的许多结论.

第三, 本书的重点是系统地论述BCI–半群理论, 这在国内外同类著作中尚不多见.

第四, 本书最突出的特点是根据作者的研究成果, 论述 BCI–代数与群和半群的关系、BCI–半群与环和半环的关系.

本书共有 5 章, 其中许多内容是作者多年从事 BCI–代数和 BCI–半群研究的成果. 第 1 章是代数基础知识, 包括序与偏序、群与半群、序半群、环及半环等内容; 第 2

章是 BCI–代数的基本理论, 主要介绍该代数系统的基础理论, 主要包括 BCI–代数和 BCK–代数的概念和基本性质、理想、滤子、商代数及同态等内容; 第 3 章论述 BCI–代数与群和半群的关系, 主要有三种 BCI–代数与群和半群的关系, 一般 BCI–代数的加法序半群和伴随半群, 其中包括了作者多年从事 BCI–代数研究的系列成果. 第 4 章论述 BCI–半群的基础理论, 包括韩国田英培教授、西北大学辛小龙教授和作者的研究成果. 第 5 章论述 BCI–半群与环和半环的关系问题, 主要是作者的研究成果.

本书是陕西省自然科学基金项目 (2010JM1016) 的研究成果汇总. 在本书编写过程中, 西北大学数学系辛小龙教授给予了极大的鼓励, 并为作者提供了许多有价值的资料; 宝鸡文理学院数学系赵天绪主任和宝鸡文理学院学科建设与研究生教育管理处给予了大力支持. 另外, 本书的出版得到了宝鸡文理学院陕西省重点学科基础数学专项经费的资助. 此外, 书中还引用了许多数学工作者的结论, 在此一并致谢!

由于作者水平有限, 书中的错误和疏漏之处在所难免, 恳请有关专家和读者不吝赐教.

作 者

2011 年 10 月于宝鸡

目　录

第1章　预备知识

数学中有三个母结构: 代数结构、序结构和拓扑结构. 这三个母结构相互交融, 形成了数学中的多个分支. 本书主要涉及代数结构和序结构. 本章主要介绍与 BCI–代数紧密联系的代数结构和序结构的基础理论, 包括偏序集、格、群、半群、序半群、环和半环等, 为本书后面的论述作好准备.

1.1　偏序集与格

本节介绍偏序集和全序集及其理想和滤子的基本概念和性质, 给出理想和滤子的分解定理, 并介绍格的有关概念和性质.

1.1.1　偏序集与全序集

定义 1.1.1　设 X 是非空集合, 把 $X\times X$ 的子集 R 叫做 X 上的二元关系. 如果 $(x,y)\in R$, 则记为 xRy.

例 1.1.1　(1) 设 X 为实数集合, 规定 $(x,y)\in R\Leftrightarrow x\leqslant y$, 则 R 为 X 上的二元关系.

(2) 设 X 为任意的非空数集, $f(x)$ 为 X 上的一元函数, 则 $f(x)$ 的图像

$$R=\{(x,f(x))|\,x\in X\}$$

是 X 上的二元关系, 但是 X 上的二元关系未必全是 X 上的一元函数的图像. 例如, (1) 是二元关系, 但却不是 X 上的一元函数的图像.

定义 1.1.2　设 X 是非空集合, “$\leqslant$” 是 X 上的二元关系, 如果

(1) 自反性: $\forall x\in X$, 必有 $x\leqslant x$;

(2) 传递性: $\forall x\leqslant y, y\leqslant z$, 必有 $x\leqslant z$;

(3) 反对称性: $\forall x\leqslant y, y\leqslant x$, 必有 $x=y$,

则称关系 “$\leqslant$” 为 X 上的偏序, 带偏序的集合 $(X,\leqslant)$ 称为偏序集. 在不致混淆的情况下, 偏序集也简写为 X. 在偏序集 X 中, 也可把 $x\leqslant y$ 写成 $y\geqslant x$.

设 $(X,\leqslant)$ 是偏序集, 如果 X 中的任意两个元素都可比较, 即 $\forall x,y\in X$ 都有 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$, 则称 $(X,\leqslant)$ 为全序集, “$\leqslant$” 叫做全序 (线性序), 把偏序集 X 中的全序子集叫做 X 的链.

例 1.1.2　(1) 设 X 为实数集, "$\leqslant$" 为通常的大小关系, 则 $(X,\leqslant)$ 显然是偏序集, 也是全序集.

(2) 设 $X=C[0,1]$, $\forall f,g\in X$, 规定

$$f\leqslant g\Leftrightarrow f(x)\leqslant g(x),\quad \forall x\in[0,1],$$

则 $(x,\leqslant)$ 是偏序集, 但不是全序集.

定义 1.1.3　设 $(X,\leqslant)$ 是偏序集, m,b 是 X 中的固定元.

(1) $\forall x\in X$, 如果由 $m\leqslant x$ 可以推出 $x=m$, 则称 m 为 X 中的极大元. 如果 $\forall x\in X$ 都有 $x\leqslant b$, 则称 b 为 X 的最大元.

(2) $\forall x\in X$, 如果由 $x\leqslant m$ 可以推出 $x=m$, 则称 m 为 X 的极小元. 如果 $\forall x\in X$ 都有 $b\leqslant x$, 则称 b 为 X 的最小元.

显然, 最大 (小) 元必是极大 (小) 元, 但反之不成立.

例 1.1.3　设 $A=\{1,2,3\}$, X 是 A 的全体真子集. 规定

$$X_1\leqslant X_2\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2,$$

则 $(X,\leqslant)$ 是偏序集, $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$ 都是 X 的极大元, 但是 X 没有最大元. $\varnothing$ 是 X 的最小元, $\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ 是 X 中的一个链.

一般地, 偏序集中的极大元未必存在, 即使存在也未必唯一, 但有如下公认的引理:

Zorn 引理　如果偏序集 X 中的每个链都有上界, 则 X 必有极大元.

定义 1.1.4　设 $(X,\leqslant)$ 是偏序集, $\varnothing\neq Y\subseteq X$, 如果 $\exists a\in X$, 使得 $\forall y\in Y$ 都有 $y\leqslant a(y\geqslant a)$, 则称 a 为 Y 的上界 (下界). 如果 b 是 Y 的上界 (下界), 并且对 Y 的任一上界 (下界)a 都有 $b\leqslant a(b\geqslant a)$, 则称 b 为 Y 的上确界 (下确界), 记为 $b=\sup Y(b=\inf Y)$ 或 $b=\vee Y(b=\wedge Y)$.

1.1.2　理想与滤子

在偏序集中, 理想与滤子是相互对偶的概念.

定义 1.1.5　设 I 是偏序集 X 的非空子集, $\forall x\in X,\forall y\in I$, 如果由 $x\leqslant y$ 可以推出 $x\in I$, 则称 I 为 X 的理想. 如果理想 $I\neq X$, 则称 I 为 X 的真理想. 令

$$(y]=\{x\in X\,|x\leqslant y\},$$

则 $(y]$ 显然是包含 y 的最小理想, 称之为关于 y 的主理想.

一般地, 设 A 是 X 的非空子集, 令

$$(A]=\{x\in X\,|\exists a\in A,x\leqslant a\},$$

显然, $(A]$ 必是包含 A 的最小理想, 称之为由 A 生成的理想.

设 J 是偏序集 X 的非空子集, $\forall x\in X,\forall z\in J$, 如果由 $z\leqslant x$ 可以推出 $x\in J$, 则称 J 为 X 的滤子. 令

$$[z)=\{x\in X\,|z\leqslant x\},$$

则 $[z)$ 显然是包含 z 的最小滤子, 称之为关于 z 的主滤子.

一般地, 设 A 是 X 的非空子集, 记

$$[A)=\{x\in X\,|\exists a\in A,a\leqslant x\},$$

显然, $[A)$ 是 X 的滤子, 称之为 A 生成的滤子.

例 1.1.4 在实数偏序集 $(R,\leqslant)$ 中, $\forall a\in R$, 则 $(-\infty,a),(-\infty,a]$ 都是 R 的理想, $(-\infty,a]$ 是关于 a 的主理想, $(a,+\infty),[a,+\infty)$ 都是 R 的滤子, $[a,+\infty)$ 是关于 a 的主滤子.

定义 1.1.6 设 X_1,X_2 都是偏序集, f 是 X_1 到 X_2 的映射, $\forall x_1,y_1\in X$, 如果由 $x_1\leqslant y_1$ 可以推出 $f(x_1)\leqslant f(y_1)$, 则称 f 为保序的. 如果存在一个 $X_1\to X_2$ 的双射 f, 使得 f,f^{-1} 都是保序的, 则称 X_1,X_2 为序同构.

定理 1.1.1 设 X_1,X_2 都是偏序集, f 是 $X_1\to X_2$ 的映射, 则以下命题等价:

(1) f 是保序的;

(2) X_2 的每个主理想的原象要么为空, 要么为 X_1 的理想;

(3) X_2 的每个主滤子的原象要么为空, 要么为 X_1 的滤子.

证明 (1)⇒(2) $\forall x_2\in X_2$, 设 $f^{-1}((x_2])=A_1\neq\varnothing,\forall y_1\in A_1$, 则 $f(y_1)\in(x_2]$, 即

$$f(y_1)\leqslant x_2,\quad \forall x_1\leqslant y_1,$$

则 $f(x_1)\leqslant f(y_1)\leqslant x_2$, 从而 $f(x_1)\in(x_2]$, 即 $x_1\in A_1$, 故 A_1 是 X_1 的理想.

(2)⇒(1) $\forall x_1,y_1\in X_1$ 且 $x_1\leqslant y_1$, 令

$$(f(y_1)]=\{y_2\in X_2\,|y_2\leqslant f(y_1)\}=A_2,$$

则

$$f^{-1}(A_2)=\{z_1\in X_1\,|f(z_1)\in A_2\}=\{z_1\in X_1\,|f(z_1)\leqslant f(y_1)\}.$$

显然, $y_1\in f^{-1}(A_2)$, 即 $f^{-1}(A_2)\neq\varnothing$, 故 $f^{-1}(A_2)$ 必为 X_1 的理想. 由于 $x_1\leqslant y_1$, 从而 $x_1\in f^{-1}(A_2)$, 即得 $f(x_1)\leqslant f(y_1)$.

(1) 与 (3) 的等价性同理可证. 证毕

定理 1.1.2 设 X 是偏序集, $\{I_k\,|k\in K\}$ 是一族理想 (滤子), 则

(1) $\bigcup\limits_{k\in K}I_k$ 是 X 的理想 (滤子);

(2) 如果 $\bigcap\limits_{k\in K} I_k \neq \varnothing$, 那么 $\bigcap\limits_{k\in K} I_k$ 也是 X 的理想 (滤子).

证明　(1) 设 $I = \bigcup\limits_{k\in K} I_k$, 对 $\forall y \in I, \exists k_0 \in K$, 使得 $y \in I_{k_0}$. 设 $x \in X, x \leqslant y$, 由于 I_{k_0} 是 X 的理想, 故 $x \in I_{k_0} \subseteq I$, 即得 $x \in I$, 从而 I 是 X 的理想.

(2) 设 $I = \bigcap\limits_{k\in K} I_k \neq \varnothing, \forall z \in I$, 则 $\forall k \in K$ 有 $z \in I_k$. 设 $x \in X, x \leqslant z$, 由于 I_k 是 X 的理想, 故 $x \in I_k$. 由 k 的任意性知 $x \in I$, 从而 I 是 X 的理想.

对滤子同理可证.　　证毕

1.1.3　理想 (滤子) 分解定理

在偏序集的理想 (滤子) 中, 希望找出一些特殊理想 (滤子), 把所有理想 (滤子) 表示出来.

首先, 给出用主理想表示任意理想 (滤子) 的一个结论.

定理 1.1.3　设 I 是偏序集 X 的任意理想 (滤子), 则

$$I = \bigcup_{a\in I} (a] \left(I = \bigcup_{a\in I} [a) \right).$$

证明　由于 I 是偏序集 X 的理想, $a \in I$, 故 $(a] \subseteq I$, 从而

$$\bigcup_{a\in I} (a] \subseteq I.$$

又由于 $\forall a \in I, a \in (a]$, 所以 $I \subseteq \bigcup\limits_{a\in I} (a]$, 从而 $I = \bigcup\limits_{a\in I} (a]$.

对滤子同理可证.　　证毕

下面通过引入次极大理想的概念, 给出另一个理想分解定理.

定义 1.1.7　设 M 是偏序集 X 的真理想, 如果对 X 的任意理想 I, 只要 $M \subseteq I$ 就有 $I = M$ 或者 $I = X$, 则称 M 为 X 的极大理想. 如果存在 $x \in X - M$, 使得对 X 的任意理想 I, 只要 $x \notin I \supseteq M$ 就有 $I = M$, 则称 M 为关于 x 的次极大理想, 记为 M_x.

定理 1.1.4　对偏序集 X 中的任意真理想 I 及任意 $x \in X - I$, 必存在关于 x 的次极大理想 M_x, 使得 $x \notin M_x \supseteq I$.

证明　设 $\alpha = \{A | A$ 是 X 的理想, 并且 $x \notin A \supseteq I\}$, 由于 $I \in \alpha$, 所以 α 非空. 设 β 为 α 中的任意链 (关于包含关系的全序子集), 令 B_0 是 β 中所有理想的并, 于是由定理 1.1.2 知, B_0 是 X 的理想, 且 $x \notin B_0 \supseteq I$, 即 $B_0 \in \alpha$, 所以 β 在 α 中有上界. 根据 Zorn 引理, α 中必有极大元, 不妨设为 M_x, 则显然, M_x 是关于 x 的次极大理想, 并且 $x \notin M_x \supseteq I$.　　证毕

定理 1.1.5　偏序集 X 的每个真理想均可表示为一些 (有限或无限) 次极大理想的交.

证明 设 I 是 X 的真理想, 由定理 1.1.4 知, $\forall x \in X - I$, 存在次极大理想 M_x, 使得 $x \notin M_x \supseteq I$. 令 $J = \bigcap\limits_{x \in X - I} M_x$, 下证 $I = J$. 对任意 $x_0 \in X - I$, 有

$$x_0 \in X - M_{x_0} \subseteq \bigcup_{x \in X - I} (X - M_x) = X - J,$$

所以 $X - I \subseteq X - J$, 即 $J \subseteq I$. 又显然 $J \supseteq I$, 所以

$$I = J = \bigcap_{x \in X - I} M_x.$$

证毕

定义 1.1.8 偏序集 X 满足理想的降链条件 (DCC), 是指对 X 的每个无限理想链

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots$$

均存在正整数 n, 使得当 $i \geqslant n$ 时都有 $I_i = I_n$.

定理 1.1.6 设偏序集 X 满足理想的降链条件, 则 X 的每个真理想均可表示为有限个次极大理想的交.

证明 假设存在一个真理想 I 不能表示为有限个次极大理想的交, 取 $x_1 \in X - I$, 于是由定理 1.1.4, 必存在关于 x_1 的次极大理想 M_{x_1}, 使得 $x_1 \notin M_{x_1} \supseteq I$. 令 $N_1 = M_{x_1}$, 则由假设知, N_1 真包含 I. 取 $x_2 \in N_1 - I$, 又由定理 1.1.4 知, 存在关于 x_2 的次极大理想 M_{x_2}, 使得 $x_2 \notin M_{x_2} \supseteq I$. 令 $N_2 = N_1 \cap M_{x_2}$, 则由于 $x_2 \in N_1, x_2 \notin N_2$, 故 N_1 真包含 N_2. 重复以上过程, 由于 I 不能表示为有限个次极大理想的交, 便得到一个无限严格降链

$$N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_k \supset \cdots,$$

这与 X 满足理想的降链条件矛盾.

证毕

1.1.4 格及其基本性质

定义 1.1.9 设 $(L, \leqslant)$ 是偏序集, 如果 $\forall a, b \in L, \sup\{a, b\}$ 恒存在, 则称 $(L, \leqslant)$ 为上半格; 如果 $\forall a, b \in L, \inf\{a, b\}$ 恒存在, 则称 $(L, \leqslant)$ 为下半格, 常记

$$a \vee b = \sup\{a, b\}, \quad a \wedge b = \inf\{a, b\}.$$

既是上半格又是下半格的偏序集称为格. 显然, 全序集必是格.

容易证明以下结论成立:

定理 1.1.7 设 $(L, \leqslant)$ 是上半格 (下半格), 则 L 中的任意非空有限子集都有上确界 (下确界), 并且有以下公式:

(1) $a \vee b = b \vee a (a \wedge b = b \wedge a)$;

(2) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)((a \wedge b) \wedge c = (a \wedge b) \wedge c)$;

(3) $a \leqslant b \Leftrightarrow a \vee b = b(a \wedge b = a)$.

定义 1.1.10　设 $(L, \leqslant)$ 是偏序集, 如果 $\forall A \subseteq L, \sup A, \inf A$ 恒存在, 则称 $(L, \leqslant)$ 为完备格. 在完备格中, 把 $\sup L$ 叫做最大元, 记为 1; 把 $\inf \varnothing$ 叫做最小元, 记为 0.

例 1.1.5　R 是实数集合, $\leqslant$ 为实数的大小关系, 则 $(\mathbf{R}, \leqslant)$ 是格, 但不是完备格. 然而 $([0,1], \leqslant)$ 是完备格.

定理 1.1.8　设 $(L, \leqslant)$ 是格, 则以下两个公式等价:

(1) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;

(2) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

证明　设 (1) 成立, 由于 $a \leqslant a \vee b, a \wedge c \leqslant a$, 由定理 1.1.7 得

$$(a \vee b) \wedge a = a, \quad a \vee (a \wedge c) = a,$$

于是

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) \\ &= a \vee ((a \vee b) \wedge c) = a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \\ &= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c),\end{aligned}$$

从而 (2) 成立.

反过来, 同理可证.　证毕

1.2　群 与 半 群

群和半群是最基本的结合代数, 本节介绍有关的概念和基本性质.

1.2.1　群

设 X 为非空集, 把 $X \times X \to X$ 的映射 "$\circ$" 叫做 X 上的二元运算. 设 $(a, b) \in X \times X$, 如果 (a, b) 在该映射下的像为 c, 则记为 $c = a \circ b$.

定义 1.2.1　设 G 是非空集合, "$\circ$" 是 G 上的二元运算, 如果

(1) 结合律成立, 即 $\forall a, b, c \in G$ 有 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;

(2) G 中存在左单位元 e, 即 $\exists e \in G$, 使得 $\forall a \in G$ 有 $e \circ a = a$;

(3) G 中任意元素都有左逆元, 即 $\forall a \in G$, $\exists a^{-1} \in G$, 使得 $a^{-1} \circ a = e$,

则称 G 关于这个二元运算作成一个群, 记为 $(G, \circ)$. 在不致混淆时, 简记为 G.

如果对 $\forall a, b \in G$ 均有 $a \circ b = b \circ a$, 即群 G 的二元运算满足交换律, 则称群 G 为交换群 (Abel 群).

例 1.2.1　设 G 为整数集, $a \circ b = a + b + 4$, 则容易验证, G 关于运算 "$\circ$" 是交换群, 并且 -4 是左单位元, $-8 - a$ 是 a 的左逆元.

通常把群中的二元运算 "$\circ$" 写成乘法, 这时群 G 也叫乘群, 但有时在交换群 G 中, 常把 G 中的二元运算写成加法, 这时 G 也叫加群. 在加群中, 单位元叫做零元, 记为 0, a 的逆元叫做负元, 记为 $-a$.

把群 G 中元素的个数叫做 G 的阶, 记为 $|G|$. 如果 $|G|$ 有限, 则称 G 为有限群; 如果 $|G|=\infty$, 则称 G 为无限群.

定理 1.2.1 群 G 中的左单位元也是右单位元, 元素 a 的左逆元也是右逆元.

证明 设 a^{-1} 是元素 a 的左逆元. 由于 G 是群, 故 a^{-1} 在 G 中也有左逆元, 不妨设为 a', 即 $a'a^{-1}=e$. 由于 e 为左单位元, 则

$$\begin{aligned} aa^{-1} &= eaa^{-1} = (a'a^{-1})(aa^{-1}) \\ &= a'(a^{-1}a)a^{-1} = a'(ea^{-1}) = a'a^{-1} = e, \end{aligned}$$

从而

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

由于 e 为左单位元, 即 $ea=a$, 从而

$$ae = a(a^{-1}a) = (aa^{-1})a = ea = a,$$

故 e 也为右单位元, 从而 a^{-1} 也是 a 的右逆元. 证毕

把左 (右) 单位元统称为群 G 的单位元, 记为 e. a 的左、右逆元统称为 G 的逆元, 记为 a^{-1}.

定理 1.2.2 群 G 的单位元唯一, 每个元素 a 的逆元都由 a 唯一确定.

证明 设 e, e' 都是 G 的单位元, 则

$$e = ee' = e'.$$

设 a^{-1}, a' 都是 a 的逆元, 于是

$$a' = a'e = a'(aa^{-1}) = (a'a)a^{-1} = ea^{-1} = a^{-1}.$$ 证毕

在群 G 中, 如果 $ab=ac$, 则左乘 a^{-1} 便得 $b=c$. 如果 $ba=ca$, 则右乘 a^{-1} 便得 $b=c$. 故群中左右消去律成立.

定义 1.2.2 设 G 是群, 如果 $\forall a \in G$ 有 $a^2=e$, 则称 G 为对合群.

定理 1.2.3 对合群必是交换群.

证明 设 G 是对合群, $\forall a, b \in G$ 有

$$a^2 = e, \quad b^2 = e, \quad (ab)^2 = e,$$

故有

$$ba = (ab)^2 ba = ababba = abaea = abe = ab,$$

即 G 是交换群. 证毕

定义 1.2.3 设 H 是群 G 的非空子集, 如果 H 关于 G 的乘法也是群, 则称 H 为 G 的子群, 记为 $H \leqslant G$.

定理 1.2.4 设 H 是群 G 的子群, 则 H 中的单位元必是 G 中的单位元, 元素 a 在 H 中的逆元必是 a 在 G 中的逆元.

证明 设 e' 为 H 的单位元, e 为 G 的单位元, 则

$$e'e' = e', \quad e'e = e',$$

即 $e'e' = e'e$, 由消去律得 $e' = e$.

设 a^{-1}, a' 分别为 a 在 G, H 中的逆元, 则 $a'a = a^{-1}a = e$, 由消去律得 $a' = a^{-1}$. 证毕

定理 1.2.5 设 H 是群 G 的非空子集, 则 $H \leqslant G$ 当且仅当

(1) $\forall a, b \in H$ 有 $ab \in H$;

(2) $\forall a \in H$ 有 $a^{-1} \in H$.

证明 设 $H \leqslant G$, 则显然 (1) 成立. $\forall a \in H$, 设 a' 是 a 在 H 中的逆元, 由定理 1.2.4 知 $a' = a^{-1}$, 故 $a^{-1} \in H$, 从而 (2) 成立.

反之, 设 (1), (2) 成立, 则显然, G 中的乘法是 H 上的二元运算, 并且 H 中的乘法结合律成立. 任取 $a \in H$, 由 (2) 知, $a^{-1} \in H$. 又由 (1) 知 $e = aa^{-1} \in H$, 从而 H 是 G 的子群. 证毕

定理 1.2.5 (1), (2) 显然可合并如下:

(3) $\forall a, b \in H$ 有 $ab^{-1} \in H$.

定义 1.2.4 设 H 是 G 的子群, $a \in G$, 将

$$aH = \{ah \,|\, h \in H\}, \quad Ha = \{ha \,|\, h \in H\}$$

分别叫做 a 关于子群 H 的左陪集和右陪集. 如果 $\forall a \in G$ 有 $aH = Ha$, 则称 H 为 G 的正规子群.

显然, $aN = bN \Leftrightarrow ab^{-1} \in N$.

定理 1.2.6 设 N 是群 G 的正规子群, 令

$$G/N = \{aN \,|\, a \in G\},$$

在 G/N 中规定

$$aN \cdot bN = (ab)N,$$

则 G/N 关于以上乘法作成一个群, 称之为 G 关于 N 的商群.

证明 首先, 说明以上陪集的运算是良好的. 设 $aN=uN, bN=vN$, 则 $au^{-1}\in N, bv^{-1}\in N$. 设 $bv^{-1}=n$, 则 $an\in aN=Na$. 再设 $an=n_1a(n_1\in N)$, 则有

$$(ab)(uv)^{-1}=a(bv^{-1})u^{-1}=anu^{-1}=n_1(au^{-1})\in N,$$

故

$$aN\cdot bN=(ab)N=(uv)N=uN\cdot vN,$$

即以上陪集的运算是良好的.

其次, 容易验证, $(G/N,\cdot)$ 是群, 并且 N 是其中的单位元, $a^{-1}N$ 是 aN 的逆元.

证毕

1.2.2 群中元素的阶

在群 G 中, 由于结合律成立, 故 $aa\cdots a$(n 个 a) 有意义. 规定

$$a^n=aa\cdots a,$$
$$a^0=e,$$
$$a^{-n}=(a^{-1})^n.$$

容易验证, 对任意整数 n,m 有

$$a^na^m=a^{n+m},\quad (a^n)^m=a^{nm}.$$

定义 1.2.5 设 a 为群 G 中的元素, 把满足 $a^n=e$ 的最小正整数 n 叫做元素 a 的阶, 记为 $|a|$. 如果这样的 n 不存在, 则称 a 的阶为 ∞.

把每个元素的阶都有限的群叫做周期群.

例 1.2.2 设 $G=\{1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$, 它关于复数的乘法作成群, 叫做 4 次单位根群, 其中 $|1|=1, |-1|=2, |\mathrm{i}|=|-\mathrm{i}|=4$, 从而 G 为周期群.

定理 1.2.7 设群 G 中元素 a 的阶为 n, 则 $a^m=e\Leftrightarrow n\,|\,m$.

证明 设 $n\,|\,m$, 可设 $m=nq$, 则

$$a^m=(a^n)^q=e^q=e.$$

反之, 设 $a^m=e$, 并令 $m=qn+r$, 其中 $0\leqslant r<n$, 则

$$a^m=a^{qn+r}=(a^n)^qa^r=a^r=e.$$

由于 $|a|=n$, 故 $r=0$, 从而 $n\,|\,m$. 证毕

定理 1.2.8 设群 G 中元素 a 的阶为 n, k 为任意整数, 则 a^k 的阶为

$$|a^k|=\frac{n}{(k,n)}.$$

证明 设 $(k,n)=d$, 可设

$$n=dn_1,\quad k=dk_1,$$

其中 $(n_1,k_1)=1$. 由于 $|a|=n$, 故有

$$(a^k)^{n_1}=a^{kn_1}=a^{nk_1}=(a^n)^{k_1}=e.$$

设 $(a^k)^m=e$, 即 $a^{km}=e$, 由定理 1.2.7 知 $n\,|km$ 从而 $n_1\,|k_1m$, 但 $(n_1,k_1)=1$, 故 $n_1\,|m$, 因此, $|a^k|=n_1$, 即

$$|a^k|=\frac{n}{(k,n)}.$$

证毕

定理 1.2.9 设群 G 中元素 a,b 的阶分别是 m, n, 并且 $ab=ba,(m,n)=1$, 则 $|ab|=mn$.

证明 首先,

$$(ab)^{mn}=a^{mn}b^{mn}=(a^m)^n(b^n)^m=e.$$

其次, 设 $(ab)^s=e$, 则

$$(ab)^{sm}=(a^m)^sb^{sm}=b^{sm}=e,$$

从而 $n\,|sm$. 但 $(m,\,n)$=1. 故 $n\,|s$. 同理可得 $m\,|s$, 从而 $mn\,|s$, 所以 $|ab|=mn$. 证毕

定理 1.2.10 在交换群 G 中, 如果所有元素有最大阶 m, 则 G 中每个元素的阶都是 m 的因数, 从而对任意 $a\in G$ 有 $a^m=e$.

证明 设 G 中元素 a 的阶 m 为最大阶, $\forall b\in G$, 设 $|b|=n$, 假设 n 不是 m 的因数, 则存在素数 p, 使得

$$m=p^km_1(p\nmid m_1),$$

$$n=p^tn_1(t>k).$$

由于 $|a|=m$, $|b|=n$, 则由定理 1.2.8 知

$$\left|a^{p^k}\right|=\frac{m}{(p^k,m)}=m_1,$$

$$|b^{n_1}|=\frac{n}{(n_1,n)}=p^t.$$

由于 $(m_1,p^t)=1$ 且 G 是交换群, 于是由定理 1.2.9 知

$$\left|a^{p^k}b^m\right|=m_1p^t>m_1p^k=m.$$

这与 m 为最大阶矛盾, 从而 $n\,|m$. 再由定理 1.2.7 知, $a^m=e$. 证毕

1.2.3 半群

定义 1.2.6 设非空集 S 上带有二元运算 "·", 如果它适合结合律

$$(ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in S,$$

则称 S 关于这个二元运算为半群. 如果 S 的非空子集 T 关于 S 中的运算 "·" 封闭, 则称 T 为 S 的子半群.

在半群 S 中, 如果存在元素 $e \in S$, 使得 $\forall a \in S$ 有 $ea = a$, 则称 e 为 S 的左幺元; 如果存在元素 $e' \in S$, 使得 $\forall a \in S$ 有 $ae' = a$, 则称 e' 为 S 的右幺元. 如果半群 S 的左、右幺元 e, e' 都存在, 则 $e = ee' = e'$, 即左、右幺元必相等. 把既是左幺元又是右幺元的元素 e 叫做 S 的幺元, 含幺元的半群叫做幺半群.

下面给出半群成为群的条件.

定理 1.2.11 设 G 是半群, 则 G 为群的充要条件是 $\forall a, b \in G$, 方程 $ax = b$, $ya = b$ 在 G 内都有解.

证明 如果 G 是群, 则 $x = a^{-1}b$, $y = ba^{-1}$ 分别是 $ax = b$, $ya = b$ 的解.

反过来, 取 G 中的固定元素 b, 设方程 $yb = b$ 的解为 e, 即 $eb = b$. $\forall a \in G$, 设方程 $bx = a$ 的解为 c, 即 $bc = a$, 则

$$ea = e(bc) = (eb)c = bc = a,$$

从而 e 为 G 中的左单位元.

又由于方程 $ya = e$ 有解, 其解就是 a 的左逆元, 从而 G 是群. 证毕

定理 1.2.12 设 G 是有限半群, 则 G 是群的充要条件是 G 中的左、右消去律成立, 即 $\forall a, b, c \in G$, 由 $ab = ac$ 可以推出 $b = c$, 由 $ba = ca$ 可以推出 $b = c$.

证明 必要性显然, 下证充分性.

设 $G = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 任取 $a \in G$, 则

$$aG = \{aa_1, aa_2, \cdots, aa_n\}.$$

由于消去律成立, 故 $aG = G$, 从而 $\forall b \in G$, $\exists aa_i \in aG = G$, 使得 $aa_i = b$, 故方程 $ax = b$ 有解、同理可证 $ya = b$ 有解, 从而 G 为群. 证毕

定义 1.2.7 设 I 是半群 S 的非空子集. 如果 $\forall s \in S$, $\forall a \in I$ 有 $sa \in I (as \in I)$, 则称 I 为 S 的左 (右) 理想. 如果 I 既为 S 的左理想, 又是 S 的右理想, 则称 I 为 S 的理想. 如果 $\forall s \in S, \forall a \in I$ 有 $asa \in I$, 则称 I 为 S 的双理想.

定理 1.2.13 在半群 S 中, 任取理想 (左理想、右理想、双理想) 族 $\{I_k, k \in K\}$(其中 K 为指标集), 则

(1) $\bigcup\limits_{k \in K} I_k$ 是 S 的理想;

(2) 如果 $\bigcap_{k\in K} I_k \neq \varnothing$, 那么 $\bigcap_{k\in K} I_k$ 是 S 的理想.

证明 (1) 设 $I = \bigcup_{k\in K} I_k$, $\forall s \in S$, $\forall a \in I$, $\exists k_0 \in K$, 使得 $a \in I_{k_0}$, 由于 I_{k_0} 是 S 的理想, 从而 $sa \in I_{k_0} \subseteq I, as \in I_{k_0} \subseteq I$, 故 I 是半群 S 的理想.

(2) 设 $J = \bigcap_{k\in K} I_k \neq \varnothing$, $\forall s \in S$, $\forall a \in J$, 则 $\forall k \in K, a \in I_k$, 从而 $sa, sa \in I_k$. 由 k 的任意性得 $sa, sa \in I$. 故 J 是半群 S 的理想.

对左理想、右理想和双理想的结论同理可证. 证毕

1.3 序 半 群

序半群是代数结构与序结构交融的基本形式, 已经形成了一套比较完整的理论体系, 这里介绍序半群的基本概念和性质.

1.3.1 概念

定义 1.3.1 设 S 是半群, "$\leqslant$" 为 S 上的偏序, $\forall a, b, c \in S$, 如果 $a \leqslant b$, 必有

$$ac \leqslant bc, \quad ca \leqslant cb,$$

则称S为序半群 (也称偏序半群, $po-$半群等), 记为$(S, \cdot, \leqslant)$. 在不致混淆时, 也记为 S.

设 c 是半群 S 中的元素, "$\leqslant$" 是 S 上的偏序, 令

$$\lambda_c : x \to cx, \quad \rho_c : x \to xc, \quad \forall x \in S,$$

则 S 是序半群 $\Leftrightarrow \forall c \in S$, λ_c, ρ_c 为保序映射.

定义 1.3.2 设 x, y 是序半群 S 中的元素, 如果集合

$$\{z \in S \,|\, zx \leqslant y\} \, (\{z \in S \,|\, xz \leqslant y\})$$

非空, 并且有最大元, 把这个最大元记为 $y : x(y :: x)$, 则称 $y : x(y :: x)$ 为 y 关于 x 的左 (右) 剩余. 如果 S 中的任意两个元素均有左剩余和右剩余, 则称 S 为可剩余半群.

在可剩余半群 S 中, $\forall x, y, z \in S$, 显然有

$$(y : x)x \leqslant y,$$
$$x(y :: x) \leqslant y,$$

$$zx \leqslant y \Rightarrow z \leqslant y : x,$$

$$xz \leqslant y \Rightarrow z \leqslant y :: x.$$

定理 1.3.1 在可剩余半群 S 中, $\forall x, y, z \in S$ 有

(1) $y \leqslant xy :: x$, $y \leqslant yx : x$;

(2) $x \leqslant y : (y :: x)$, $x \leqslant y :: (y : x)$;

(3) $a \leqslant b \Rightarrow \forall x \in S$, $a : x \leqslant b : x$, $a :: x \leqslant b :: x$;

(4) $a \leqslant b \Rightarrow x : b \leqslant x : a$, $x :: b \leqslant x :: a$;

(5) $(y : x)x = y \Leftrightarrow \exists z \in S$, 使得 $zx = y$;

(6) $x(y :: x) = y \Leftrightarrow \exists z \in S$, 使得 $xz = y$.

证明 (1) 由 $xy \leqslant xy$ 得 $y \leqslant xy :: x$. 由 $yx \leqslant yx$ 得 $y \leqslant yx : x$.

(2) 由于 $x(y :: x) \leqslant y$, 故 $x \leqslant y : (y :: x)$. 由于 $(y : x)x \leqslant y$, 故 $x \leqslant y :: (y : x)$.

(3) 由 $(a : x)x \leqslant a \leqslant b$ 得 $(a : x)x \leqslant b$, 故 $a : x \leqslant b : x$. 由 $x(a :: x) \leqslant a \leqslant b$ 得 $x(a :: x) \leqslant b$, 故 $a :: x \leqslant b :: x$.

(4) 由 $(x : b)b \leqslant x$ 和 $a \leqslant b$ 得 $(x : b)a \leqslant (x : b)b \leqslant x$, 从而 $(x : b)a \leqslant x$, 故 $x : b \leqslant x : a$. 由 $b(x :: b) \leqslant x$ 和 $a \leqslant b$ 得 $a(x :: b) \leqslant b(x :: b) \leqslant x$, 从而 $a(x :: b) \leqslant x$, 故 $x :: b \leqslant x :: a$.

(5) $\Rightarrow$ 显然.

$\Leftarrow$ 由于 $zx = y$, 故 $z \leqslant y : x$, 从而 $y = zx \leqslant (y : x)x$. 显然, $(y : x)x \leqslant y$, 故 $(y : x)x = y$.

(6) $\Rightarrow$ 显然.

$\Leftarrow$ 由于 $xz = y$, 故 $z \leqslant y :: x$, 从而 $y = xz \leqslant x(y :: x)$, 但 $x(y :: x) \leqslant y$, 故 $x(y :: x) = y$. 证毕

定理 1.3.2 设 S 为可剩余半群, 则 S 可换 $\Leftrightarrow \forall x, y \in S$, $x : y = x :: y$.

证明 $\Rightarrow$ 如果 S 可换, $xz \leqslant y \Leftrightarrow zx \leqslant y$, 从而 $x : y = x :: y$.

$\Leftarrow$ $\forall x, y \in S$, 由于 $xy \leqslant xy$, 故 $x \leqslant xy : y = xy :: y$, 从而 $yx \leqslant xy$. 同理可得 $xy \leqslant yx$, 故 $xy = yx$. 证毕

1.3.2 理想

在序半群 S 中, 任取两个子集 A, B, 规定 $AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$. 显然有

$$(AB)C = A(BC), \quad A(B \cup C) = AB \cup AC, \quad AA \subseteq A.$$

定义 1.3.3 设 I 是序半群 S 中的非空子集, 如果

(1) $IS \subseteq I (SI \subseteq I, ISI \subseteq I, IS \cap SI \subseteq I)$;

(2) $\forall a \in I, \forall b \in S, b \leqslant a \Rightarrow b \in I$,

则称 I 为 S 的右理想 (左理想、双理想、拟理想). 如果 I 既是 S 的左理想, 又是 S 的右理想, 则称 I 为 S 的理想.

显然, S 的理想必是 S 的双理想和拟理想, 并且 I 是序半群的理想当且仅当 I 既是半群的理想又是偏序集的理想.

在序半群 S 中, 取一个非空子集 A, 与偏序集中类似地, 规定

$$(A] = \{b \in S \,|\, \exists a \in A, \text{使得} b \leqslant a\}.$$

如果 A 是半群 S 的理想, 则显然有 $(A] = A$.

引理 1.3.1　设 A, B 都是序半群 S 的非空子集, 则

(1) $(A](B] \subseteq (AB]$;

(2) $A \subseteq B \Rightarrow (A] \subseteq (B]$.

证明　(1) $\forall x \in (A], \forall y \in (B], \exists a \in A, \exists b \in B$, 使得 $x \leqslant a$, $y \leqslant b$, 故有

$$xy \leqslant xb \leqslant ab \in AB,$$

故 $xy \in (AB]$.

(2) $\forall x \in (A]$, $\exists a \in A$, 使得 $x \leqslant a \in A \subseteq B$, 故 $x \in (B]$, 即 $(A] \subseteq (B]$.　　证毕

另外, 容易验证, $(A \cup SA]$ 是包含 A 的最小左理想, $(A \cup AS]$ 是包含 A 的最小右理想, $(A \cup SA \cup AS \cup SAS]$ 是包含 A 的最小理想, 把它们分别称为 A 生成的左理想、右理想和理想, 把 A 生成的理想记为 (A). 特别地, 把由一个元素 a 生成的理想

$$(a) = (a \cup Sa \cup aS \cup SaS]$$

叫做 a 生成的主理想.

定理 1.3.3　设 I 是序半群 S 的理想, 则 $(SIS]$ 必是 S 的理想.

证明　首先,

$$S(SIS] \subseteq (SSIS] \subseteq (SIS], \quad (SIS]S \subseteq (SISS] \subseteq (SIS].$$

其次, $\forall a \in (SIS], \exists s_1ts_2 \in (SIS]$, 使得 $a \leqslant s_1ts_2$. 设 $b \leqslant a$, 则 $b \leqslant s_1ts_2$, 从而 $b \in (SIS]$, 故 $(SIS]$ 是序半群 S 的理想.　　证毕

定理 1.3.4　在序半群 S 中, 任取理想族 $\{I_k \,|\, k \in K\}$(其中 K 为指标集), 则

(1) $\bigcup\limits_{k \in K} I_k$ 是 S 的理想;

(2) 如果 $\bigcap\limits_{k \in K} I_k \neq \varnothing$, 那么 $\bigcap\limits_{k \in K} I_k$ 是 S 的理想.

证明　(1) 设 $I = \bigcup\limits_{k \in K} I_k$, 由定理 1.2.13 知, I 是半群 $(S, \cdot)$ 的理想. 再由定理 1.1.2 知, I 是偏序集 S 的理想, 因此 I 是序半群 S 的理想.

(2) 设 $J = \bigcap\limits_{k \in K} I_k \neq \varnothing$, 由定理 1.2.13 知. J 是半群 $(S, \cdot)$ 的理想. 再由定理 1.1.2 知, J 是偏序集 S 的理想. 因此, J 是序半群 S 的理想.　　证毕

同理可证, 对左理想、右理想、双理想和拟理想也有同样的结论.

定理 1.3.5 设 S 为序半群.

(1) 设 T 是 S 的子半群, I 是 S 的理想, 并且 $I \cap T \neq \varnothing$, 则 $I \cap T$ 是 T 的理想,

(2) S 的每个拟理想都是双理想.

证明 (1) $\forall t \in T, \forall a \in I \cap T$, 由于 I 是 S 的理想, 故 $ta, at \in I$. 又由于 $ta, at \in T$, 故 $ta, at \in I \cap T$, 即 $T(I \cap T), (I \cap T)T \subseteq I \cap T$. 另外, $\forall a \in I \cap T, \forall b \in T$, 设 $b \leqslant a$, 由于 I 为 S 的理想且 $b \leqslant a \in I$, 故 $b \in I$, 从而 $b \in I \cap T$, 故 $I \cap T$ 为 T 的理想.

(2) 设 Q 是 S 的拟理想, 即 $QS \cap SQ \subseteq Q$, 由于 $QSQ \subseteq QS$, $QSQ \subseteq SQ$, 故 $QSQ \subseteq Q$. 另外, $\forall a \in Q, \forall b \in S$, 设 $b \leqslant a$, 显然, $b \in Q$, 故 Q 是 S 的双理想. 证毕

1.3.3 素理想与半素理想

定义 1.3.4 设 S 是序半群, I 是 S 的理想.

(1) $\forall A, B \subseteq S$, 如果由 $AB \subseteq I$ 可以推出 $A \subseteq I$ 或 $B \subseteq I$, 则称 I 为 S 的素理想;

(2) $\forall A \subseteq S$, 如果由 $A^2 \subseteq I$ 可以推出 $A \subseteq I$, 则称 I 为 S 的半素理想;

(3) 对 S 的任意理想 A, B, 如果由 $AB \subseteq I$ 可以推出 $A \subseteq I$ 或 $B \subseteq I$, 则称 I 为弱素理想.

显然, S 的素理想必是半素的和弱素的. 另外, 定义 1.3.4(1),(2) 分别与以下的 (1′), (2′) 等价:

(1′) $\forall a, b \in S$, 由 $ab \in I$ 可以推出 $a \in I$ 或 $b \in I$;

(2′) $\forall a \in S$, 由 $a^2 \in I$ 可以推出 $a \in I$.

定理 1.3.6 设 I 是序半群 S 的理想, 则以下命题等价:

(1) I 是弱素理想;

(2) $\forall a, b \in S$, 由 $(aSb] \subseteq I$ 可以推出 $a \in I$ 或 $b \in I$;

(3) $\forall a, b \in S$, 由 $(a)(b) \subseteq I$ 可以推出 $a \in I$ 或 $b \in I$.

证明 (1)⇒(2) $\forall a, b \in S$, 设 $(aSb] \subseteq I$, 由于 I 是 S 的理想, 故

$$(SaS]\,(SbS] \subseteq (SaSSbS] \subseteq (SaSbS] \subseteq (SIS] \subseteq I.$$

由于

$$S\,(SaS]\,, (SaS]\,S \subseteq (SaS]\,,$$

故 $(SaS]$ 是 S 的理想. 同理可证, $(SbS]$ 也是 S 的理想.

由 (1) 得 $(SaS] \subseteq I$ 或 $(SbS] \subseteq I$. 如果 $(SaS] \subseteq I$, 则

$$(a)^2 = (a \cup Sa \cup aS \cup SaS]\,(a \cup Sa \cup aS \cup SaS] \subseteq (Sa \cup SaS]\,,$$

$$(a)^2(a) \subseteq (Sa \cup SaS]\,(a \cup Sa \cup aS \cup SaS] \subseteq (SaS] \subseteq I.$$

由 (1) 知 $(a)^2 \subseteq I$ 或 $(a) \subseteq I$, 从而 $(a) \subseteq I$, 即 $a \in I$.

如果 $(SbS] \subseteq I$, 则同理可得 $b \in I$.

(2) ⇒ (3) $\forall a, b \in S$, 设 $(a)(b) \subseteq I$, 则

$$(aSb] \subseteq ((a](Sb]] \subseteq [(a)(b)] \subseteq I,$$

故 $a \in I$ 或 $b \in I$.

(3) ⇒(1) 设 A, B 为 S 的理想, $AB \subseteq I$ 且 $A \not\subseteq I$, 则 $\exists a \in A$, $a \notin I$, $\forall b \in B$, 则 $(a) \subseteq A, (b) \subseteq B$, 从而 $(a)(b) \subseteq AB \subseteq I$.

由 (3) 得出 $a \in I$ 或 $b \in I$, 但 $a \notin I$, 故 $b \in I$, 从而 $B \subseteq I$, 故 I 是弱素理想. 证毕

与定理 1.3.6 同理可证如下定理:

定理 1.3.7 设 I 是序半群 S 的理想, 则以下命题等价:

(1) I 是半素理想;

(2) $\forall a, b \in S$, $(aSa] \subseteq I \Rightarrow a \in I$;

(3) $\forall a \in S$, $(a)^2 \subseteq I \Rightarrow a \in I$.

定理 1.3.8 设 I 是序半群 S 的理想, 则 I 是素的当且仅当 I 既是弱素的又是半素的.

证明 如果 I 是素的, 则显然, I 是弱素的和半素的.

设 I 既是弱素的又是半素的, $\forall a, b \in S$, 设 $ab \in I$, 则

$$(bSa]^2 = (bSa](bSa] \subseteq (bSabSa] \subseteq (bSISa] \subseteq I.$$

由于 I 为半素的, 所以 $(bSa] \subseteq I$, 从而

$$(SbS](SaS] \subseteq (SbSSaS] \subseteq (S(bSa)S] \subseteq (SIS] \subseteq I.$$

由于 I 为弱素的, 于是有

$$(SbS] \subseteq I \quad 或 \quad (SaS] \subseteq I.$$

如果 $(SaS] \subseteq I$, 则 $(a)^3 \subseteq (SaS] \subseteq I$, 故 $(a) \subseteq I$, 即 $a \in I$.

如果 $(SbS] \subseteq I$, 同理可得 $b \in I$, 故 I 为素理想. 证毕

定理 1.3.9 设 S 是可换序半群, I 是 S 的理想, 则 I 为素的 ⇔ I 为弱素的.

证明 素的必为弱素的. 下设 I 为弱素的, $\forall a, b \in S$, 设 $ab \in I$, 则

$$(a)(b) = (a \cup Sa \cup aS \cup SaS](b \cup Sb \cup bS \cup SbS] \subseteq (ab \cup Sab) \subseteq I,$$

故 $(a) \in I$ 或 $(b) \in I$, 从而 $a \in I$ 或 $b \in I$, 即 I 为素理想. 证毕

1.3.4 滤子

定义 1.3.5 设 S 是序半群, F 是 S 的非空子集. 如果

(1) $\forall a,b\in F, ab\in F\Leftrightarrow a\in F$且$b\in F$;

(2) $\forall a\in F,\forall s\in S$, 由$a\leqslant s$ 可以推出 $s\in F$,

则称 F 为序半群 S 的滤子.

定理 1.3.10 设 S 是序半群, F 是 S 的非空真子集, 则以下命题等价:

(1) F 是 S 的滤子;

(2) $S-F$ 是 S 的素理想.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) $\forall a\in S-F,\forall s\in S$, 假设 $as\in F$, 由于 F 是滤子, 故 $a\in F$, 矛盾, 故 $as\notin F$, 即 $as\in S-F$. 同理得 $sa\in S-F$.

再设 $b\leqslant a$, 假设 $b\in S$, 由于 F 是滤子, 故 $a\in F$, 矛盾, 所以 $b\in S-F$, 于是, $S-F$ 是 S 的理想.

设 $xy\in S-F$, 假设 $x,y\in F$, 由于 F 是滤子, 故 $xy\in F$, 矛盾, 故 $x\in S-F$ 或者 $y\in S-F$, 故 $S-F$ 是 S 的素理想.

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 $ab\in F, a,b\in S$, 假设 $a\in S-F$ 或者 $b\in S-F$, 由于 $S-F$ 是 S 的理想, 故 $ab\in S-F$, 矛盾, 故 $a\in F, b\in F$. 反过来, 如果 $a\in F, b\in F$, 假设 $ab\in S-F$, 由于 $S-F$ 是 S 的素理想, 故 $a\in S-F$ 或者 $b\in S-F$, 矛盾, 故 $ab\in F$.

设 $\forall a\in F, a\leqslant s, s\in S$, 假设 $s\in S-F$, 由于 $S-F$ 是 S 的理想, 故 $a\in S-F$, 矛盾, 故 $s\in F$, 从而 F 是 S 的滤子. 证毕

1.4 环

环是有两种代数运算的结合代数, 本节介绍它们的有关概念和基本性质.

1.4.1 环的概念

如果把交换群中的运算写为加法, 则这样的群通常叫做加群, 加群中的单位元叫零元 0, a 的逆元叫负元, 记为 $-a$. 设 n 为正整数, 记

$$\begin{aligned} na &= \overbrace{a+a+\cdots+a}^{n\text{个}a},\\ 0a &= 0,\\ (-n)a &= n(-a). \end{aligned}$$

把满足 $na=0$ 的最小的正整数 n 叫做元素 a 的阶, 记为 $|a|$.

定义 1.4.1 设非空集 R 上有加法和乘法两种二元运算, 如果

(1) $(R,+)$ 是加群;

(2) $(R, \cdot)$ 是半群;

(3) $\cdot$ 对 $+$ 的左、右分配律成立, 即 $\forall a, b, c \in R$ 有

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (b+c)a = ba + ca,$$

则称 R 关于这两种运算是一个环, 记为 $(R, +, \cdot)$, 在不致混淆时, 简记为 R.

如果环 R 的乘法满足交换律, 即 $\forall a, b \in R$ 有 $ab = ba$, 则称 R 为交换环.

在加群 $(R, +)$ 上, 规定 $\forall a, b \in R$, $ab = 0$, 则 $(R, +, \cdot)$ 显然是环, 叫零乘环.

定义 1.4.2　设 R 是环, 如果 $\exists e \in R$, 使得 $\forall a \in R$ 有 $ea = a$, 则称 e 为 R 的左单位元, 如果 $\exists e' \in R$, 使得 $\forall a \in R$ 有 $ae' = a$, 则称 e' 为 R 的右单位元. 既是左单位元又是右单位元的元素叫做单位元, 记为 1. 在有单位元的环中, 如果 $ba = ab = 1$, 则称 b 为 a 的逆元, 记为 a^{-1}. 一个环可能无左单位元, 也可能无右单位元, 但是, 如果 R 既有左单位元, 又有右单位元, 则它们必相等.

在环 R 中, 由于 $(R, +)$ 是加群, 故 $ka (k \in \mathbf{Z})$ 有意义.

定理 1.4.1　在环 R 中, 以下公式成立:

(1) $0a = a0 = 0$;

(2) $(-a)b = b(-a) = -ab$, $(-a)(-b) = ab$;

(3) $c(a-b) = ca - cb$, $(a-b)c = ac - bc$;

(4) $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_i b_j$;

(5) $(ma)(nb) = (mn)(ab)$.

证明　(1) $0a + 0a = (0+0)a = 0a$, 所以 $0a = 0$. 同理, $a0 = 0$.

(2) $ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0b = 0$, 故 $(-a)b = ab$. 同理可得 $b(-a) = -ab$.

(3) $(-a)(-b) = -(a(-b)) = ab$.

(4) 由数学归纳法直接得证.

(5) 由 (4) 直接得证.　　证毕

在环 R 中, 规定

$$a^n = \underbrace{aa \cdots a}_{n个a},$$

当 R 有单位元时, 规定

$$a^0 = 1,$$

当 R 中的元素 a 可逆时, 规定

$$a^{-n} = (a^{-1})^n.$$

容易验证, 对任意整数 m, n 有

$$(a^n b^n) = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

定义 1.4.3 设 S 是环 R 的非空子集, 如果 S 关于 R 中的加法和乘法作成环, 则称 S 为 R 的子环. 容易验证如下定理:

定理 1.4.2 设 S 是环 R 的非空子集, 则 S 是 R 的子环当且仅当

$$\forall a, b \in S \Rightarrow a - b \in S, \quad ab \in S.$$

定义 1.4.4 设 a, b 是环 R 中的非零元, 并且 $ab = 0$, 分别称 a, b 为 R 的左、右零因子, 它们统称为 R 的零因子.

显然, 环 R 是无零因子的当且仅当 $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ 或者 $b = 0$.

定理 1.4.3 在无零因子环中, 左、右消去律成立. 反之, 一个消去律成立, 则 R 无零因子, 从而另一个消去律也成立.

证明 设 R 是无零因子环, $ab = ac (a \neq 0)$, 则 $a(b - c) = 0$, 从而 $b - c = 0$, 即 $b = c$.

设 $ba = ca$ $(a \neq 0)$, 即 $(b - c)a = 0$, 则 $b - c = 0$, 即 $b = c$.

反过来, 设左消去律成立, 设 $ab = 0$ $(a \neq 0)$, 故 $ab = a0$, 从而 $b = 0$. 证毕

定义 1.4.5 把无零因子的交换环叫做整环, 每个非零元都可逆的环叫做除环, 交换除环叫做域.

容易验证, 域既是整环也是除环. 反过来, 若既是整环也是除环, 则必是域.

1.4.2 环的特征

定义 1.4.6 如果环 R 中的所有元素都对加法有最大阶 n, 则称 n 为环 R 的特征, 记为 $\mathrm{char}R$. 特别地, 如果 R 中的元素关于加法无最大阶, 则称 R 的特征为 ∞, 记为 $\mathrm{char}R{=}\infty$.

显然, 有限环的特征必有限, 无限环的特征也可能有限.

定理 1.4.4 在环 R 上, 令

$$M = \{n | n \text{ 为正整数, 并且 } \forall a \in R \text{有} \quad na = 0\},$$

则当 $M = \varnothing$ 时, R 的特征为 ∞; 当 $M \neq \varnothing$ 时, M 中的最小正整数就是 R 的特征.

证明 (1) 如果 $M = \varnothing$, 假设 $\mathrm{char}R = n$, 由定理 1.2.10 知, $\forall a \in R$, $na = 0$, 从而 $n \in M$, 矛盾, 故 $\mathrm{char}R{=}\infty$.

(2) 如果 $M \neq \varnothing$, 取 m 为 M 中的最小数, 则 $\forall a \in R$, $ma = 0$, 故 $|a|| m$, 从而 R 中的元素有最大阶. 设这个最大阶为 n, 则由定理 1.2.10 知 $n \in M$. 由于 m 是 M 中

的最小数, 故 $m \leqslant n$. 但是, 另一方面, 由于 n 是最大阶, 设 $|b| = n$, 并且 $mb = 0$, 从而 $n \leqslant m$, 故 $n = m$. 证毕

一般来说, 环中各元素对加法的阶不相同, 但对无零因子环来说有如下定理:

定理 1.4.5 设 R 是阶大于 1 的无零因子环, 则

(1) R 中所有非零元的阶 (对加法) 均相同;

(2) 若 R 的特征有限, 则必为素数.

证明 (1) 如果 R 中所有非零元的阶都无限, 则认为相同. 如果 $\exists a \in R, a \neq 0$, 使得 $|a| = n$, 则 $\forall b \in R$, $b \neq 0$ 有

$$a(nb) = (na)b = 0b = 0.$$

由 $a \neq 0$ 得 $nb = 0$, 故 $|b| \leqslant n$.

设 $|b| = m$, 则

$$(ma)b = a(mb) = a0 = 0,$$

且 $b \neq 0$, 故 $ma = 0$, 从而 $n \leqslant m$, 故 $|b| = m = n$.

(2) 假设 $\mathrm{char}R = n > 1$ 且 $n = n_1 n_2$, $1 < n_1, n_2 < n$. 设 a 是 R 中的任一非零元, 由 (1) 得 $|a| = n$, 故 $n_1 a \neq 0$, $n_2 a \neq 0$, 但

$$(n_1 a)(n_2 a) = (n_1 n_2)a^2 = (na)a = 0a = 0,$$

这与 R 无零因子矛盾. 从而, n 为素数. 证毕

定理 1.4.6 环 R 有单位元 1, 则 1 关于加法的阶就是 R 的特征.

证明 如果 1 的阶为 ∞, 则 $\mathrm{char}R = \infty$. 如果 1 的阶为 n, $\forall a \neq 0$, $a \in R$ 有

$$na = n(1a) = (n1)a = 0a = 0,$$

故 $|a| \leqslant n$, 从而 $\mathrm{char}R = n$. 证毕

1.4.3 环的理想

定义 1.4.7 设 I 是环 R 的非空子集, 如果

(1) $\forall a, b \in I$ 有 $a - b \in I$;

(2) $\forall r \in R$, $\forall a \in I$ 有 $ra \in I(ar \in I)$,

则称 I 为 R 的左理想 (右理想). 如果 I 既是左理想又是右理想, 则称 I 为 R 的理想.

显然, 交换环的左 (右) 理想都是理想, 并且理想一定是子环. 0, R 都是 R 的理想, 称之为 R 的平凡理想; 非平凡的理想叫真理想. 只有平凡理想的环叫单环. 环 R 的任意个理想的交仍是 R 的理想.

定理 1.4.7 除环和域都是单环.

证明 设 I 是除环 R 的非零理想, $a \in I$, $a \neq 0$, 则 $a^{-1}a = 1 \in I$, 从而 $\forall r \in R$, $r = r1 \in I$, 故 $I = R$, 所以 R 只有平凡理想, 即 R 为单环. 证毕

定义 1.4.8 设 a 是环 R 中的元素, 把包含 a 的全部理想的交叫做由 a 生成的主理想, 记为 (a).

显然, (a) 即为包含 a 的最小理想.

定理 1.4.8 设 a 是环 R 中的任一元素, 则

$$(a) = \left\{ xa + ay + na + \sum_{i=1}^{m} x_i a y_i \;\middle|\; \begin{array}{l} x, y, x_i, y_i \in R, i = 1, 2, \cdots, m, \\ n \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{N} \end{array} \right\}.$$

特别地, 如果 R 是交换环, 则有

$$(a) = \{ra + na | r \in R, n \in \mathbf{Z}\}.$$

当 R 有单位元 1 时,

$$(a) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i a y_i | x_i, y_i \in R, i = 1, 2, \cdots, m, m \in \mathbf{Z}^+ \right\}.$$

当 R 是有单位元交换环时,

$$(a) = \{ra \,| r \in R\}.$$

证明 首先, 由于 $a \in (a)$, 故对任意整数 n, $na \in (a)$. 其次, 对 $\forall x, y, x_i, y_i \in R (i = 1, 2, \cdots, m)$ $xa, ay, x_i a y_i \in (a)$, 从而

$$xa + ay + na + \sum_{i=1}^{m} x_i a y_i \in (a).$$

最后, 上式的所有元素已经作成一个包含 a 的理想, 所以

$$(a) = \left\{ xa + ay + na + \sum_{i=1}^{m} x_i a y_i \,| x, y, x_i, y_i \in R, n \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{N} \right\}.$$

特别地,

(1) 当 R 是交换环时, 由于

$$xa + ay + na + \sum_{i=1}^{m} x_i a y_i = \left(x + y + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) a + na = ra + na,$$

故

$$(a) = \{ra + na \,| r \in R, n \in \mathbf{Z}\}.$$

(2) 当 R 有单位元时,

$$xa+ay+na=xa1+1ay+(n1)a1,$$

故

$$(a)=\left\{\sum_{i=1}^{m}x_iay_i\,|x_iy_i\in R,i=1,2,\cdots,m,m\in\mathbf{N}\right\}.$$

(3) 当 R 是有单位元的交换环时,

$$(a)=\{ra\,|r\in R\}.$$

证毕

定义 1.4.9 设 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 是环 R 的非空子集, 将

$$S_1+S_2+\cdots+S_m=\left\{\sum_{i=1}^{m}x_i\,|x_i\in S_i\ ,i=1,2,\cdots,m\right\}$$

叫做 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 的和, 将

$$S_1S_2\cdots S_m=\left\{\sum_{i=1}^{n}x_1^{(i)}x_2^{(i)}\cdots x_m^{(i)}\ \middle|\ \begin{array}{l}x_k^{(i)}\in S_k,k=1,2\cdots,m,\\ i=1,2,\cdots,n,n\in\mathbf{N}\end{array}\right\}$$

叫做 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 的积.

定理 1.4.9 设 $I_1,I_2,\cdots,I_n$, J 都是环 R 的理想, 则

(1) $(I_1+I_2)+I_3=I_1+(I_2+I_3)$, $(I_1I_2)I_3=I_1(I_2I_3)$;

(2) $I_1+I_2+\cdots+I_n$, $I_1I_2\cdots I_n$ 都是 R 的理想;

(3) $J(I_1+I_2+\cdots+I_n)=JI_1+JI_2+\cdots+JI_n$,

$$(I_1+I_2+\cdots+I_n)J=I_1J+I_2J+\cdots+I_nJ.$$

证明 (1) 由定义 1.4.9 直接得证.

(2) 如果 $n=2$, $\forall a,b\in I_1+I_2$, 可设

$$a=a_1+a_2\in I_1+I_2,\quad b=b_1+b_2\in I_1+I_2,\quad a_1,b_1,\in I_1,a_2,b_2\in I_2,$$

于是

$$a-b=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)\in I_1+I_2,$$

$$ra=ra_1+ra_2\in I_1+I_2,\quad ar=a_1r+a_2r\in I_1+I_2,\quad\forall r\in R,$$

故 I_1+I_2 是 R 的理想. 假设 $I_1+I_2+\cdots+I_{n-1}$ 是 R 的理想, 则

$$I_1+I_2+\cdots+I_n=(I_1+I_2+\cdots+I_{n-1})+I_n$$

必是 R 的理想. 同理可得 $I_1I_2\cdots I_n$ 也是 R 的理想.

(3) 用数学归纳法证明. 证毕

早在公元前 1 世纪, 中国古代数学家就建立了下列闻名于世的初等数论中的中国剩余定理:

给定正整数 $m_1,m_2,\cdots,m_n$, 其中当 $i\neq j$ 时, $(m_i,m_j)=1$, 则对于任意整数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$, 同余方程组

$$x=b_1(\mathrm{mod}m_1),$$
$$x=b_2(\mathrm{mod}m_2),$$
$$\cdots\cdots$$
$$x=b_n(\mathrm{mod}m_n)$$

有解, 并且在模 $m=m_1m_2\cdots m_n$ 下, 这个解是唯一的.

两千多年来, 世界各国的数学家致力于把中国剩余定理推广到各种代数系统上来, 下面先给出环中两个元素关于理想的同余, 由此把中国剩余定理推广到环论上.

定义 1.4.10 设 I 是环 R 的理想, $a,b\in R$, 如果 $a-b\in I$, 则称 a,b 关于模 I 同余, 记为 $a=b(\mathrm{mod}I)$.

容易验证, 同余关系是等价关系, 并且

$$a_1\equiv b_1(\mathrm{mod}I),a_2\equiv b_2(\mathrm{mod}I)\Rightarrow a_1+b_1\equiv a_2+b_2(\mathrm{mod}I).$$

定理 1.4.10(中国剩余定理) 设 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 都是环 R 的理想, $R^2+I_i=R$, $I_i+I_j=R$ $(i=1,2,\cdots,n,j\neq i)$, $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 R 中的任意 n 个元素, 则存在 $b\in R$, 使得

$$b\equiv b_i(\mathrm{mod}I_i),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

并且 c 是以上同余方程的解 $\Leftrightarrow b\equiv c(\mathrm{mod}I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_n)$.

证明 由于 $I_1+I_2=R$, $I_1+I_3=R$, 故

$$R^2=(I_1+I_2)(I_1+I_3)=I_1^2+I_1I_3+I_2I_1+I_2I_3\subseteq I_1+I_2I_3\subseteq I_1+I_2\cap I_3.$$

再由 $R=I_1+R^2$ 得

$$R=I_1+R^2\subseteq I_1+(I_1+I_2\cap I_3)\subseteq I_1+I_2\cap I_3\subseteq R,$$

故 $R=I_1+I_2\cap I_3$. 假设 $R=I_1+(I_2\cap I_3\cap\cdots\cap I_{k-1})$, 则

$$R^2=(I_1+(I_2\cap I_3\cap\cdots\cap I_{k-1}))(I_1+I_k)\subseteq I_1+(I_2\cap I_3\cap\cdots\cap I_k),$$

故

$$R=R^2+I_1\subseteq I_1+(I_2\cap I_3\cap\cdots\cap I_k)\subseteq R,$$

即

$$R = I_1 + (I_2 \cap I_3 \cap \cdots \cap I_k).$$

于是对任意 $k = 1, 2, \cdots, n$ 有 $R = I_k + \bigcap\limits_{i \neq k} I_i$. 也就是说, 对每个 $b_k \in R$, 存在 $a_k \in I_k$, $r_k \in \bigcap\limits_{i \neq k} I_i$, 使得 $b_k = a_k + r_k$, 即 $b_k - r_k = a_k \in I_k$, 并且

$$r_k \in \bigcap_{i \neq k} I_i \subseteq I_i, \quad i \neq k,$$

从而

$$b_k \equiv r_k(\mathrm{mod} I_k), \quad r_k \equiv 0(\mathrm{mod} I_i), \quad i \neq k, k = 1, 2, \cdots, n.$$

令 $b = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$, 则

$$b - b_i = \sum_{k \neq i} r_k - (b_i - r_i) \in I_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

故 $b \equiv b_i(\mathrm{mod} I_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

另外, 如果 $c \in R$, 使得 $c \equiv b_i(\mathrm{mod} I_i)$, 则 $b \equiv c(\mathrm{mod} I_i)$, 即 $b - c \in I_i$, 从而 $b - c \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} I_i$, 即 $b = c\left(\mathrm{mod} \bigcap\limits_{i=1}^{n} I_i\right)$. 证毕

1.5 半 环

在信息科学与计算机科学迅速发展的推动下, 关于半环理论及其应用的研究正在不断深入地进行. 这几年, 关于半环的文献越来越多, 主要集中在一些特殊半环、理想及建立在理想之上的同余关系等.

本节介绍半环的基本理论, 为第 5 章打好基础.

1.5.1 基本概念

定义 1.5.1 设非空子集合 S 上有两种二元运算 $+$ 和 $\cdot$, 如果

(1) $(S, +), (S, \cdot)$ 都是半群;

(2) $\cdot$ 对 $+$ 适合左、右分配律: $\forall a, b, c \in S$ 有

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca,$$

则称 S 关于 $+$ 和 $\cdot$ 运算是一个半环, 记为 $(S, +, \cdot)$. 在不致混淆时, 也简记为 S.

设 S 是半环, 如果适合加法 (乘法) 交换律, 则称 S 为加法 (乘法) 交换半环, 如果 S 既适合加法交换律, 又适合乘法交换律, 则称 S 为交换半环. 如果存在 $0 \in S$, 使

得 $\forall a \in S$, 有

$$0+a=a+0=a, \quad 0a=a0=0,$$

则称 0 为半环 S 的零元. 在含零元的半环 S 中, 如果 $\forall a \in S$, $\exists b \in S$, 使得 $a+b=b+a=0$, 则称 b 为 a 的负元.

在半环 S 中, 如果 $\exists 1 \in S$ 使得 $\forall a \in S$, 有

$$1a=a1=a,$$

则称 1 为 S 的幺元. 在含幺元的半环 S 中, $a \in S$, 如果存在 $b \in S$, 使得

$$ab=ba=1,$$

则称 a 可逆, 把 b 叫 a 的逆元, 记为 a^{-1}.

显然, 半环是环的推广. 在半环 S 中, 零元和幺元未必存在, 但是如果存在, 则必唯一.

另外, 在半环 S 中, 由于 $(S,+),(S,\cdot)$ 都是半群, 故 $\forall a \in S$, $\forall n \in \mathbf{N}^{+}$, 规定

$$na=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{个}}, \quad a^n=\underbrace{aa\cdots a}_{n\text{个}}.$$

例 1.5.1　设 $\mathbf{N}$ 是非负整数集合, $\mathbf{N}$ 关于普通加法和普通乘法作成半环, 并且 0, 1 分别是零元和幺元.

例 1.5.2　设 S 是半环, 取 S 中的 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成一个 n 级方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

以上 n 级方阵的全体记为 $M_n(S)$, 它关于矩阵的加法和乘法运算作成半环, 称之为半环 S 上的 n 级矩阵环, 记为 $M_n(S)$. 如果 S 是加法交换半环, 则 $M_n(S)$ 也是加法交换半环. 如果 0, 1 分别是 S 中的零元和幺元, 则

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

分别是 $M_n(S)$ 中的零元和幺元.

例 1.5.3 设 S_1, S_2 都是半环, 将

$$S_1 \times S_2 = \{(x_1, x_2)\,|x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$$

叫做 S_1 与 S_2 的乘积, 规定

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2),$$

则 $S_1 \times S_2$ 也是半环, 并且当 S_1, S_2 分别可换时, $S_1 \times S_2$ 也可换. 当 $0_1, 0_2$ 分别是 S_1, S_2 的零元时, $0 = (0_1, 0_2)$ 是 $S_1 \times S_2$ 的零元. 当 $1_1, 1_2$ 分别是 S_1, S_2 的幺元时, $1 = (1_1, 1_2)$ 是 $S_1 \times S_2$ 的幺元.

由定理 1.2.11 知, 加法交换半环 S 是环 $\Leftrightarrow \forall a, b \in S$, $a + x = b$ 在 S 内有解. 更进一步, 有如下定理:

定理 1.5.1 含幺元 1 的半环是环 $\Leftrightarrow \forall a, b \in S$, $a + x = b$, $y + a = b$ 在 S 内有解.

证明 如果 $\forall a, b \in S$, $a + x = b$, $y + a = b$ 在 S 内有解, 则由定理 1.2.11 知, $(S, +)$ 是群. 设 1 是 S 的幺元, 则

$$\begin{aligned}(a + b) - (b + a) &= 1(a + b) - 1(b + a) = 1a + 1b + (-1)b + (-1)a \\ &= 1a + (1 - 1)b + (-1)a = 1a + 0b + (-1)a \\ &= (1 + (-1))a = 0a = 0,\end{aligned}$$

故 $a + b = b + a$, 从而 $(S, +)$ 是加群, 即 $(S, +, \cdot)$ 是环.

反过来, 如果 S 是含幺元 1 的环, 则显然, $b - a$ 是 $a + x = b$, $y + a = b$ 的解. 证毕

定义 1.5.2 设 T 是半环 S 的非空子集, 如果 T 关于 S 的加法和乘法也作成半环, 则称 T 为 S 的子半环.

显然, T 是 S 的子半环 $\Leftrightarrow \forall a, b \in T$, 有 $a + b, ab \in T$.

1.5.2 半环的理想

定义 1.5.3 设 I 是半环 S 的非空子集, 如果

(1) $\forall a, b \in I$ 有 $a + b \in I$;

(2) $\forall s \in S, \forall a, b \in I$ 有 $sa \in I(as \in I, asb \in I)$,

则称 I 为 S 的左理想 (右理想、双理想). 如果 I 既是左理想又是右理想, 则称 I 为 S 的理想. 显然, 半环 S 的理想一定是双理想, 但双理想未必是理想.

显然, I 是 S 的理想当且仅当 I 既是半群 $(S, +)$ 的子半群, 又是半群 $(S, \cdot)$ 的理想.

例 1.5.4 设 S 是非负实数集, $M_2(S)$ 关于加法和乘法作成半环, 取 $M_2(S)$ 的非空子集

$$I=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} | a_1, a_2 \in S\right\},$$

任取 $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in I$, $\forall X=\begin{pmatrix} x_{11}, x_{12} \\ x_{21}, x_{22} \end{pmatrix} \in M_2(S)$, 则

$$AXB=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1x_{11}b_1+a_1x_{12}b_2 & 0 \\ a_2x_{11}b_1+a_2x_{12}b_2 & 0 \end{pmatrix} \in I,$$

故 I 是 $M_2(S)$ 的双理想, 也可验证 I 是左理想, 但是, 由于

$$AX=\begin{pmatrix} a_1x_{11} & a_1x_{12} \\ a_2x_{11} & a_2x_{12} \end{pmatrix},$$

故 I 不是右理想, 从而 I 不是理想.

另外, 半环 S 的理想一定是子环, 但子环未必是理想.

例 1.5.5 取 $\mathbf{Q}^+$ 为正有理数集合, $\mathbf{Q}^+$ 关于普通加法和普通乘法作成半环. 取 $\mathbf{N}$ 为正整数集合, 显然, $\mathbf{N}$ 是 $\mathbf{Q}^+$ 的子环, 但是, $\mathbf{N}$ 显然不是 $\mathbf{Q}^+$ 的理想.

定义 1.5.4 设 I 是半环 S 的理想, 如果 $\forall a, b \in S$, 由 $a+b \in I$ 且 $a \in I$ 可以推得 $b \in I$, 则称 I 为 S 的正规理想.

显然, 环 R 中的任一理想都是半环 R 上的正规理想. 因为在环 R 中, $\forall a, b \in R$, $\exists -a \in R$ 且 $a+(-a)=0$, 故由 $a+b \in I$ 且 $a \in I$ 得 $b=-a+a+b \in I$.

例 1.5.6 取 S 为非负整数集, S 关于数的普通加法和普通乘法作成半环, m 为一个固定非负整数. 令

$$I=\{km \,|k \in S\},$$

则 I 是 S 的正规理想.

定理 1.5.2 设 S 是半环, 任取 S 的一族理想 (左理想、右理想、双理想)$\{I_k|k \in K\}$(其中 K 为指标集).

(1) 如果 $I_k, k \in K$ 两两可比较, 则 $\bigcup\limits_{k\in K} I_k$ 是 S 的理想;

(2) 如果 $\bigcap\limits_{k\in K} I_k \neq \varnothing$, 则 $\bigcap\limits_{k\in K} I_k$ 是 S 的理想.

证明 (1) 设 $I=\bigcup\limits_{k\in K} I_k$, 显然, $I \neq \varnothing$. $\forall a, b \in I$, 则 $\exists k_1, k_2 \in K$, 使得 $a \in I_{k_1}$, $b \in I_{k_2}$. 由于 I_{k_1}, I_{k_2} 可比较, 不妨取 $I_{k_1} \subseteq I_{k_2}$, 则 $a, b \in I_{k_2}$, 但 I_{k_2} 是 S 的理想, 故 $a+b \in I_{k_2} \subseteq I$. $\forall x \in S$, 由于 $a \in I_{k_1}$, 故 $xa, ax \in I_{k_1} \subseteq I$, 故 I 是 S 的理想.

(2) 设 $J=\bigcap_{k\in K} I_k\neq\varnothing$, $\forall a,b\in J$, 则 $\forall k\in K$ 有 $a,b\in I_k$, 但 I_k 是 S 的理想, 故 $a+b\in I_k$. 由 k 的任意性知 $a+b\in J$. $\forall x\in S$, 由于 $\forall k\in K, a\in I_k$, 故 $xa,ax\in I_k$, 从而 $xa,ax\in J$, 故 J 是 S 的理想. 证毕

定义 1.5.5 设 A 是半环 S 的非空子集, 把所有包含 A 的理想之交叫做由 A 生成的理想, 记为 (A). 如果 $A=\{a\}$, 则称之为由 a 生成的主理想, 记为 (a).

定理 1.5.3 设 S 是含零元的半环, $a\in S$, 则 a 生成的主理想为

$$(a)=\left\{\sum_{i=1}^{m}(n_ia+x_ia+ay_i+u_iav_i)\ \middle|\ \begin{array}{l}x_i,y_i,u_i,v_i\in S, n_i\in\mathbf{N},\\ i=1,2,\cdots,m, m\in\mathbf{N}^+\end{array}\right\}.$$

特别地, 当 S 含幺元时,

$$(a)=\left\{\sum_{i=1}^{m}u_iav_i\ \middle|\ u_i,v_i\in S, m\in\mathbf{N}^+\right\};$$

当 S 可换时,

$$(a)=\{na+sa\mid n\in\mathbf{N}, s\in S\};$$

当 S 为含幺元的交换环时,

$$(a)=\{sa\mid s\in S\}.$$

证明 与定理 1.4.8 类似. 证毕

1.5.3 半环的同余、同态和同构

以下讨论的半环指含零元的加法交换半环.

定义 1.5.6 设 A 是非空集合, 将 $A\times A$ 中的非空子集 R 叫做 A 上的关系. 如果 $(a,b)\in R$, 则称 a, b 有关系 R, 记为 aRb. 如果关系 R 满足

(1) 反身性: $\forall a\in A$, 则 aRa;

(2) 对称性: 如果 aRb, 则 bRa;

(3) 传递性: 如果 aRb, bRc, 则 aRc,

称 R 为 A 上的等价关系.

定义 1.5.7 设 S 是半环, R 是 S 上的等价关系. 如果 R 是积半环 $S\times S$ 的子半环, 即由 xRy, uRv 可以推出

$$(x+u)R(y+v),\quad (xu)R(yv),$$

则称 R 为 S 上的同余关系, 简称 R 为 S 上的同余.

例 1.5.7 设 S 为半环, 则 $S\times S, \Delta=\{(x,x)\mid x\in S\}$ 都是 S 上的同余.

定理 1.5.4　设 S 是含零元的加法交换半环, I 是 S 的理想, 令

$$R=\left\{(x,y)\,|\exists a\in I\,,\text{使得}x+a=y+a,x,y\in S\right\},$$

则 R 是 S 上的同余, 称之为由理想 I 生成的同余.

反过来, 设 R 是 S 上的同余, 令

$$I=\{a\in S\,|(a,0)\in R\},$$

则 I 是 R 的理想, 称 I 为由 R 生成的理想.

证明　容易验证, R 是 S 上的等价关系. 设 xRy,uRv, 即 $\exists a,b\in I$, 使得

$$x+a=y+a,\quad u+b=v+b,$$

则

$$(x+u)+(a+b)=(y+v)+(a+b),\quad a+b\in I,$$

从而 $(x+u)R(y+v)$. 又由 $x+a=y+a$ 得

$$xu+au=yu+au,\quad au\in I,$$

故 $(xu)R(yu)$.

由 $u+b=v+b$ 得

$$yu+yb=yv+yb,\quad yb\in I,$$

故 $(yu)R(yv)$, 从而 $(xu)R(yv)$, 所以 R 是 S 上的同余.

反过来, 设 R 是 S 的同余, 令 $I=\{a\in S\,|aR\,0\}$. 由于 $0\in I$, 故 $I\neq\varnothing.\forall a,b\in I$, 即 $aR0,bR0$, 则 $(a+b)R0$, 从而 $a+b\in I$. 另外, $\forall x\in S$, xRx, 故 $(xa)R0$, $(ax)R0$, 即 $xa,ax\in I$, 故 I 是 S 的理想. 证毕

设 R 是半环 S 的同余, $\forall a\in S$, 令

$$\overline{a}=\{x\in S\,|xRa\},\quad S/R=\{\overline{a}\,|a\in S\},$$

于是 S/R 是 S 是一个分类. 规定

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b},\quad \overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{ab}.$$

先说明这两种运算良好的.

设 $\overline{a}=\overline{a'}$, $\overline{b}=\overline{b'}$, 则

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b},\quad \overline{a'}+\overline{b'}=\overline{a'+b'}.$$

由 aRa', bRb' 可得 $(a+b)R(a'+b')$, 故 $\overline{a}+\overline{b}=\overline{a'}+\overline{b'}$. 同理可得 $\overline{a}\overline{b}=\overline{a'}\,\overline{b'}$, 故以上 $+$, $\cdot$ 是 S/R 上的二元运算.

$\forall \overline{a},\overline{b},\overline{c}\in S/R$ 有

$$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{(a+b)+c}=\overline{a+(b+c)}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c}),$$

$$(\overline{a}\overline{b})\overline{c}=\overline{(ab)c}=\overline{a(bc)}=\overline{a}(\overline{b}\overline{c}),$$

$$\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a(b+c)}=\overline{ab+ac}=\overline{a}\overline{b}+\overline{a}\,\overline{c},$$

$$(\overline{b}+\overline{c})\overline{a}=\overline{(b+c)a}=\overline{ba+ca}=\overline{b}\overline{a}+\overline{c}\,\overline{a},$$

故 $(S/R,+,\cdot)$ 是半环. 证毕

定义 1.5.8 设 R 是半环 S 的同余, 在 S/R 中规定

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b},\quad \overline{a}\overline{b}=\overline{ab}.$$

将半环 $(S/R,+,\cdot)$ 叫做 S 关于同余 R 的商半环.

设 I 是半环 S 的理想, R 是由 I 生成的同余, 将 S 关于 R 的商半环 S/R 也叫做 S 关于理想 I 的商半环, 记为 S/I.

定义 1.5.9 设 $S,\bar{S}$ 都是半环, f 是 S 到 $\bar{S}$ 的映射. 如果 $\forall a,b\in S$ 有

$$f(a+b)=f(a)+f(b),\quad f(ab)=f(a)f(b),$$

则称 f 为 S 到 $\bar{S}$ 的同态映射. 如果存在 S 到 S' 的同态满射, 则称 S 与 $\bar{S}$ 同态, 记为 $S\sim\bar{S}$. 将 S 到 $\bar{S}$ 的同态双射叫做 S 到 $\bar{S}$ 的同构. 如果存在 S 到 $\overline{S}$ 的同构映射, 则称 S 与 $\bar{S}$ 同构, 记为 $S\cong\bar{S}$.

定理 1.5.5 设 $(S,+,\cdot)\sim(\bar{S},+,\cdot)$, f 是同态满射, 当 S 有零元 0 时, $\bar{S}$ 也有零元 $\bar{0}=f(0)$. 当 S 有幺元 1 时, $\bar{S}$ 也有幺元 $1=f(1)$.

证明 设 0, 1 分别为半环 S 的零元和幺元, $\bar{0}=f(0)$, $\bar{1}=f(1)$. $\forall\bar{a}\in\bar{S}$, 由于 f 是同态满射, 故 $\exists a\in S$, 使得 $\bar{a}=f(a)$, 故有

$$\bar{0}+\bar{a}=f(0)+f(a)=f(0+a)=f(a)=\bar{a},$$

$$\bar{a}+\bar{0}=f(a)+f(0)=f(a+0)=f(a)=\bar{a},$$

$$\bar{0}\bar{a}=f(0)f(a)=f(0a)=f(0)=\bar{0},$$

$$\bar{a}\bar{0}=f(a)f(0)=f(a0)=f(0)=\bar{0},$$

从而 $\bar{0}$ 为 $\bar{S}$ 中的零元. 同理可证, $\bar{1}=f(1)$ 是 $\bar{S}$ 中的幺元. 证毕

设 f 是半环 S 到 $\bar{S}$ 的同态映射, 令

$$\ker f=\{(x,y)\,|\,f(x)=f(y),x,y\in S\},$$

显然, $\ker f$ 是 S 上的等价关系. 设 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\ker f$, 即

$$f(x_1)=f(y_1),\quad f(x_2)=f(y_2),$$

则

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)=f(y_1)+f(y_2)=f(y_1+y_2),$$

从而

$$(x_1+x_2,y_1+y_2)\in\ker f,$$

$$f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)=f(y_1)f(y_2)=f(y_1y_2),$$

从而 $(x_1x_2,y_1y_2)\in\ker f$, 故 $\ker f$ 是 S 上的同余. 证毕

定义 1.5.10 设 f 是半环 S 到 $\bar{S}$ 的同态映射, 将

$$\ker f=\{(x,y)\,|\,f(x)=f(y),x,y\in S\}$$

叫做 f 的核.

以上讨论说明, $\ker f$ 是 S 上的同余. 显然, f 为单射 $\Leftrightarrow\ker f=0$, f 为满射 $\Leftrightarrow f(S)=\bar{S}$.

定理 1.5.6 设 R 是半环 S 的同余, 则 $S\sim S/R$, 并且

$$\pi:S\to S/R,\quad x\to\overline{x}$$

是 S 到 S/R 的同态满射, 称 π 为 S 到 S/R 的自然同态.

证明 π 显然是 S 到 S/R 的满射. $\forall x,y\in S$, $\pi(x)=\overline{x}$, $\pi(y)=\overline{y}$. 故

$$\pi(x+y)=\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}=\pi(x)+\pi(y),$$

$$\pi(xy)=\overline{xy}=\overline{x}\overline{y}=\pi(x)\pi(y),$$

故 π 为 S 到 S/R 的同态满射. 证毕

定理 1.5.7 设 f 是半环 S 到 $\bar{S}$ 的同态满射, $K=\ker f$, 则存在唯一的 S/K 到 $\bar{S}$ 的同构映射 φ, 使得 $f=\varphi\pi$.

证明 设 φ: $S/K\to S$, $\overline{x}\to f(x)$, $\forall\overline{x},\overline{y}\in S/K$, 由于

$$\overline{x}=\overline{y}\Leftrightarrow(x,y)\in\ker f\Leftrightarrow f(x)=f(y),$$

故 φ 为单射.

$\forall \bar{x} \in \bar{S}$, 由于 f 为满射, 故存在 $x \in S$, 使得 $f(x) = \bar{x}$, 从而

$$\varphi(\overline{x}) = f(x) = \bar{x},$$

其中 $\bar{x} \in S/K$, 故 f 为双射. $\forall \overline{x}, \overline{y} \in S/K$, 设 $\pi(x) = \overline{x}, \quad \pi(y) = \overline{y}$, 则

$$\varphi(\overline{x} + \overline{y}) = \varphi(\overline{x + y}) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \varphi(\overline{x}) + \varphi(\overline{y}),$$

$$\varphi(\overline{x}\,\overline{y}) = \varphi(\overline{xy}) = f(xy) = f(x)f(y) = \varphi(\overline{x})\varphi(\overline{y}),$$

则 φ 是 S/K 到 $\bar{S}$ 的同构映射. 显然, $\varphi\pi = f$.

如果还有 S/K 到 $\bar{S}$ 的同构映射 ϕ 也使得 $\phi\pi = f$, 则 $\forall \overline{x} \in S/K$ 有

$$\phi(\overline{x}) = \phi(\pi(x)) = f(x) = \varphi(\pi(x)) = \varphi(\overline{x}),$$

故 $\phi = \varphi$.　　证毕

第 2 章　BCI–代数的一般理论

1966 年, 日本数学家 K. Iséki 和 Y. Imai 以逻辑运算和集合的差运算为背景, 相继引入了 BCK 代数和 BCI–代数, 曾引起了国内外数学工作者的极大兴趣, 仅在我国已发表的相关论文就达 400 余篇. 由于它们是十分广泛的逻辑代数, 所以也得到数理逻辑方面研究者的重视. 本章介绍 BCI 代数的一般理论, 包括 BCI–代数的概念和性质, BCK–代数的概念和性质, BCI–代数中元素的阶, BCI–代数的理想、商代数、BCI–同态和 BCI–同构, 还介绍 BCI–代数与偏序集之间的关系.

2.1　BCI–代数的概念和基本性质

2.1.1　概念

在集合论中有三种常见的运算：并、交、差. 这里同时考虑这三种运算, 并把它们的特性一般化, 从而产生了 Boole 代数; 同时考虑并和交这两种运算, 并把它们的特性一般化, 从而产生了格论. 如果只考虑并或交一种运算, 便是常见的结合代数. 但是, 如果只考虑差运算, 就不是传统的结合代数了, 下面分析这种代数结构的特征.

取非空集 X 上的幂集 $P(X)$, 容易验证其上的差运算有以下基本公式：

(1) $(A-B)-(A-C)\subseteq C-B$;

(2) $A-(A-B)\subseteq B$;

(3) $A\subseteq A$;

(4) $A\subseteq B, B\subseteq A\Rightarrow A=B$.

再看命题演算. 用 p,q,r 表示任意命题, “$\to$” 表示 “蕴涵”, “$\equiv$” 表示 “等价”, “$\wedge$” 表示 “并且”, “$\to$” 作为命题之间的一种运算, 有以下基本公式：

(1) $[(p\to q)\to(p\to r)]\to(r\to q)$;

(2) $[p\to(p\to q)]\to q$;

(3) $p\to p$;

(4) $(p\to q)\wedge(q\to p)\to p\equiv q$.

虽然集合的差运算与命题的蕴涵运算是截然不同的两个概念, 但是由以上分析可见, 它们的运算特性十分相似. 因此, 有必要从它们的共同特性出发, 建立一种新的代数结构.

1966 年, 由日本数学家 K. Iséki 和 Y. Imai 引入了以下概念：

定义 2.1.1　设 X 是带二元运算 "$*$" 及一个常元 0 的集合, 如果 $\forall x,y,z\in X$, 满足

(1) $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$;　　(2.1.1)

(2) $(x*(x*y))*y=0$;　　(2.1.2)

(3) $x*x=0$;　　(2.1.3)

(4) $x*y=0$ 且 $y*x=0\Rightarrow x=y$,　　(2.1.4)

则称 X 为一个 BCI-代数, 记为 $(X,*,0)$. 在不致混淆时, 也记为 X. 如果一个 BCI-代数 X 还满足

(5) $0*x=0$,　　(2.1.5)

则称 X 为 BCK-代数. 非 BCK 的 BCI-代数称为真 BCI-代数.

下面给出几个 BCI-代数的例子.

例 2.1.1　在非空集 X 的幂集 $P(X)$ 中, 取集合的差运算, 空集 $\varnothing$ 为 $P(X)$ 中的常元. 由于 $A\subseteq B\Leftrightarrow A-B=\varnothing$, 则由前面关于差运算的基本公式得

(1) $((A-B)-(A-C))-(C-B)=\varnothing$;

(2) $(A-(A-B))-B=\varnothing$;

(3) $A-A=\varnothing$;

(4) $A-B=\varnothing,B-A=\varnothing\Rightarrow A=B$,

故 $(P(X),-,\varnothing)$ 是 BCI-代数.

例 2.1.2　设 $\mathbf{N}$ 为非负整数集合, 规定 $x*y=\max\{0,x-y\}$.

(1) 如果 $x\leqslant y$, 则有

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)=(0*(x*z))*(z*y)=0;$$

如果 $y<x\leqslant z$, 则 $x-y\leqslant z-y$, 从而有

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)=((x-y)*0)*(z-y)=(x-y)*(z-y)=0;$$

如果 $y<x,z\leqslant y$, 则有

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)=((x-y)*(x-z))*0=0*0=0;$$

如果 $y<z<x$, 则有

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)=((x-y)*(x-z))*(z-y)=(z-y)*(z-y)=0,$$

故定义 2.1.1 中的条件 (1) 成立.

(2) 如果 $x\leqslant y$, 则

$$(x*(x*y))*y=(x*0)*y=x*y=0;$$

如果 $y < x$, 则

$$(x*(x*y))*y=(x*(x-y))*y=y*y=0,$$

故定义 2.1.1 中的条件 (2) 成立.

(3) 显然, $x*x=0$.

(4) $x*y=0 \Leftrightarrow x \leqslant y$, 故 $x*y=0, y*x=0 \Leftrightarrow x=y$.

由此可见, $(N,*,0)$ 是 BCI-代数.

例 2.1.3 设 G 是以 e 为单位元的交换群, $\forall a,b \in G$, 规定 $a*b=ab^{-1}$, 则有

$$\begin{aligned}((a*b)*(a*c))*(c*b) &= \left(\left(ab^{-1}\right)\left(ac^{-1}\right)^{-1}\right)\left(cb^{-1}\right)^{-1} \\ &= ab^{-1}ca^{-1}bc^{-1}=e,\end{aligned}$$

$$(a*(a*b))*b=a\left(ab^{-1}\right)^{-1}b^{-1}=aba^{-1}b^{-1}=e,$$

$$a*a=aa^{-1}=e,$$

$$a*b=b*a=e \Leftrightarrow ab^{-1}=ba^{-1}=e \Leftrightarrow a=b,$$

故 $(G,*,e)$ 是 BCI-代数.

例 2.1.4 设 $X=\{0,1,2,3\}$, 运算 “$*$” 规定为

$*$	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

可以验证, $(X,*,0)$ 是 BCI-代数.

下面讨论 BCI-代数的等价定义.

设 X 是 BCI-代数, 由式 (2.1.2) 知

$$(x*(x*0))*0=0,$$

再由式 (2.1.3), (2.1.1) 得

$$\begin{aligned}0*(x*(x*0)) &= ((x*(x*0))*0)*(x*(x*0)) \\ &= ((x*(x*0))*(x*x))*(x*(x*0))=0,\end{aligned}$$

即

$$0*(x*(x*0))=0.$$

由式 (2.1.4) 得

$$x * (x * 0) = 0.$$

又由式 (2.1.2) 知

$$(x * 0) * x = (x * (x * x)) * x = 0,$$

故得

$$x * 0 = x. \tag{2.1.6}$$

反过来, 如果式 (2.1.1), (2.1.4), (2.1.6) 都成立, 则

$$(x * (x * y)) * y = ((x * 0) * (x * y)) * (y * 0) = 0,$$

$$x * x = (x * x) * 0 = ((x * 0) * (x * 0)) * (0 * 0) = 0,$$

即 (2.1.2), (2.1.3) 成立, 从而得到如下 BCI–代数的等价定义:

定义 2.1.2 设集合 X 上有二元运算 "$*$" 及常元 0, 如果 $\forall x, y, z \in X$ 有

(1) $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$;

(2) $x * 0 = x$;

(3) $x * y = 0$ 且 $y * x = 0 \Rightarrow x = y$,

则称 X 为一个 BCI–代数, 记为 $(X, *, 0)$, 简记为 X.

定义 2.1.3 设 Y 是 BCI(BCK) 代数 X 的非空子集, 如果 Y 关于运算 "$*$" 封闭, 则称 Y 为 X 的子代数.

显然, BCI(BCK)–代数的子代数仍为 BCI(BCK)–代数.

定理 2.1.1 设 $(X, *, 0)$ 是 BCI–代数, 令

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x * y = 0, \tag{2.1.7}$$

则 "$\leqslant$" 是 X 上的偏序, 即 $(X, \leqslant)$ 是偏序集, 并且 0 为该偏序的极小元.

证明 任取 $x, y, z \in X$.

首先, $x * x = 0$, 故 $x \leqslant x$, 即反身性成立.

其次, 如果 $x \leqslant y, y \leqslant x$, 即 $x * y = 0, y * x = 0$, 则由 (2.1.4) 知 $x = y$, 即反对称性成立.

最后, 如果 $x \leqslant y, y \leqslant z$, 即 $x * y = 0, y * z = 0$. 则由式 (2.1.6), (2.1.1) 得

$$x * z = ((x * z) * 0) * 0 = ((x * z) * (x * y)) * (y * z) = 0,$$

即 $x \leqslant z$, 从而传递性成立, 故 "$\leqslant$" 是 X 上的偏序.

设 $x \leqslant 0$, 则 $x = x * 0 = 0$, 故 0 为该偏序的极小元. 证毕

把偏序 "$\leqslant$" 叫做 BCI–代数 X 的自然偏序.

式 (2.1.1)~(2.1.4) 可以改写为

$$(x*y)*(x*z)\leqslant z*y, \tag{2.1.1'}$$

$$x*(x*y)\leqslant y, \tag{2.1.2'}$$

$$x\leqslant x, \tag{2.1.3'}$$

$$x\leqslant y, y\leqslant x\Rightarrow x=y. \tag{2.1.4'}$$

2.1.2 基本性质

定理 2.1.2 设 $(x,*,0)$ 是 BCI–代数, $\forall x,y,z\in X$ 且 $x\leqslant y$, 则有

$$z*y\leqslant z*x,\quad x*z\leqslant y*z. \tag{2.1.8}$$

证明 由于 $x\leqslant y$, 即 $x*y=0$, 则有

$$(z*y)*(z*x)=((z*y)*(z*x))*(x*y)=0,$$

即得

$$z*y\leqslant z*x.$$

由于

$$\begin{aligned}(x*z)*(y*z)&=((x*z)*0)*(y*z)\\&=((x*z)*(x*y))*(y*z)=0,\end{aligned}$$

故得

$$x*z\leqslant y*z.$$ 证毕

定理 2.1.3 在 BCI–代数 X 中, $\forall x,y,z\in X$, 则有

$$(x*y)*z=(x*z)*y. \tag{2.1.9}$$

证明 由式 (2.1.2′) 知

$$x*(x*z)\leqslant z,$$

再由式 (2.1.8), (2.1.1′) 得

$$(x*y)*z\leqslant (x*y)*(x*(x*z))\leqslant (x*z)*y,$$

即

$$(x*y)*z\leqslant (x*z)*y.$$

将 y,z 互换得

$$(x*z)*y\leqslant (x*y)*z,$$

故

$$(x*y)*z=(x*z)*y.$$ 证毕

由定理 2.1.3 可直接得到如下推论:

推论 2.1.1 在 BCI–代数 X 中, $\forall x,y,z\in X$, 则有

(1) $x*y\leqslant z\Rightarrow x*z\leqslant y$; (2.1.10)

(2) $(x*z)*(y*z)\leqslant x*y$. (2.1.11)

定理 2.1.4 在 BCI–代数 X 中, $\forall x,y,z\in X$, 则有

(1) $x*(x*(x*y))=x*y$; (2.1.12)

(2) $0*(x*y)=(0*x)*(0*y)$. (2.1.13)

证明 (1) 由式 (2.1.1′), (2.1.2) 得

$$(x*y)*(x*(x*(x*y)))\leqslant(x*(x*y))*y=0,$$

但 0 是 X 中的极小元, 故

$$(x*y)*(x*(x*(x*y)))=0.$$

又由式 (2.1.2) 知

$$(x*(x*(x*y)))*(x*y)=0,$$

从而

$$x*(x*(x*y))=x*y.$$

(2) 由式 (2.1.9), (2.1.3) 得

$$\begin{aligned}(0*x)*(0*y)&=(((x*y)*(x*y))*x)*(0*y)\\&=(((x*x)*y)*(x*y))*(0*y)\\&=((0*y)*(0*y))*(x*y)\\&=0*(x*y).\end{aligned}$$

证毕

定义 2.1.4 设 X 是 BCI 代数, n 为正整数, $\forall x,y\in X$, 规定

$$x*y^0=x,$$

$$x*y^n=(\cdots((x*\underbrace{y)*y)*\cdots)*y}_{n次}.$$

定理 2.1.5 设 X 是 BCI–代数, m, n 为任意正整数, $\forall x,y,z\in X$ 有

(1) $(x*y^n)*z^m=(x*z^m)*y^n$; (2.1.14)

(2) $0*(0*x^n)=0*(0*x)^n$; (2.1.15)

(3) $0*(x*y)^n=(0*x^n)*(0*y^n)$; (2.1.16)

(4) $(0*x^m)*(0*x^n)=0*x^{m-n} \quad (m\geqslant n)$; (2.1.17)

(5) $0*(0*x^n)^m=0*(0*x^{mn})$; (2.1.18)

(6) $x*(x*(x*y))^n=x*y^n$. (2.1.19)

证明 (1) 当 $m=1$ 时, 由式 (2.1.9) 得

$$\begin{aligned}(x*y^n)*z&=((\cdots(x*y)*\cdots)*y)*z\\&=((\cdots(x*y)*\cdots)*z)*y\\&=\cdots=(x*z)*y^n.\end{aligned}$$

假设对 $m-1$, 有

$$(x*y^n)*z^{m-1}=(x*z^{m-1})*y^n,$$

则

$$\begin{aligned}(x*y^n)*z^m=((x*y^n)*z^{m-1})*z&=((x*z^{m-1})*y^n)*z\\&=((x*z^{m-1})*z)*y^n\\&=(x*z^m)*y^n.\end{aligned}$$

(2) 由式 (2.1.13) 知

$$\begin{aligned}0*(0*x^n)&=0*((0*x^{n-1})*x)\\&=(0*(0*x^{n-1}))*(0*x)\\&=\cdots=0*(0*x)^n.\end{aligned}$$

(3) 当 $n=1$ 时, 即为式 (2.1.13). 假设对 $n-1$ 命题成立, 即

$$0*(x*y)^{n-1}=(0*x^{n-1})*(0*y^{n-1}),$$

则由式 (2.1.13), (2.1.14), (2.1.9), (2.1.16) 得

$$\begin{aligned}0*(x*y)^n&=(0*(x*y))*(x*y)^{n-1}\\&=((0*x)*(0*y))*(x*y)^{n-1}\\&=((0*x)*(x*y)^{n-1})*(0*y)\\&=((0*(x*y)^{n-1})*x)*(0*y)\\&=(((0*x^{n-1})*(0*y^{n-1}))*x)*(0*y)\\&=(((0*x^{n-1})*x)*(0*y)^{n-1})*(0*y)\\&=((0*x^n)*(0*y)^{n-1})*(0*y)\end{aligned}$$

$$= (0 * x^n) * (0 * y)^n = (0 * (0 * y)^n) * x^n$$
$$= (0 * (0 * y^n)) * x^n = (0 * x^n) * (0 * y^n).$$

(4) 由式 (12.1.14) 得

$$(0 * x^m) * (0 * x^n) = ((0 * x^n) * x^{m-n}) * (0 * x^n)$$
$$= ((0 * x^n) * (0 * x^n)) * x^{m-n} = 0 * x^{m-n}.$$

(5) 当 $m = 1$ 时, 显然成立. 假设对 $m - 1$ 命题成立, 即

$$0 * (0 * x^n)^{m-1} = 0 * (0 * x^{(m-1)n}),$$

则由式 (2.1.15), (2.1.12) 得

$$0 * (0 * x^n)^m = (0 * (0 * x^n)) * (0 * x^n)^{m-1}$$
$$= (0 * (0 * x)^n) * (0 * x^n)^{m-1}$$
$$= (0 * (0 * x^n)^{m-1}) * (0 * x)^n$$
$$= (0 * (0 * x^{(m-1)n})) * (0 * x)^n$$
$$= 0 * (0 * x)^{mn} = 0 * (0 * x^{mn}).$$

(6) 当 $n = 1$ 时, 即为式 (2.1.12). 假设对 $n - 1$ 命题成立, 即

$$x * (x * (x * y))^{n-1} = x * y^{n-1},$$

则

$$x * (x * (x * y))^n = (x * y^{n-1}) * (x * (x * y))$$
$$= (x * (x * (x * y))) * y^{n-1}$$
$$= (x * y) * y^{n-1} = x * y^n.$$

证毕

2.1.3 自然偏序的极小元和分支

由定理 2.1.1 知, 在 BCI-代数 X 中, "$\leqslant$" 是 X 的偏序. 设 a 是 X 中的元素, 对任意 $x \in X$, 如果由 $x \leqslant a$ 可推出 $x = a$, 则称 a 为 X 的极小元.

下面讨论极小元的性质.

定理 2.1.6　在 BCI–代数 X 中, 以下命题等价:

(1) a 为 X 中的极小元;

(2) $0 * (0 * a) = a$;

(3) 存在 $x \in X$, 使得 $a = 0 * x$.

证明 (1)⇒(2) 由式 (2.1.2′) 得

$$0 * (0 * a) \leqslant a,$$

但 a 为极小元, 故 $0 * (0 * a) = a$.

(2)⇒(3) 取 $x = 0 * a$, 显然, $a = 0 * x$.

(3)⇒(1) 设 $a = 0 * x$ 且 $y \leqslant a$, 即 $y * a = 0$, 则有

$$\begin{aligned} a * y &= (0 * x) * y = ((y * a) * x) * y \\ &= ((y * y) * x) * a = (0 * x) * a = a * a = 0, \end{aligned}$$

故 $a \leqslant y$, 从而 $y = a$, 即 a 为极小元. 证毕

推论 2.1.2 BCI–代数 X 的全体极小元之集记为 $L(X)$, 则

$$L(X) = \{0 * x \,|x \in X\}.$$

推论 2.1.3 在 BCI 代数 X 中, $\forall x \in X$, 存在极小元 a, 使得 $a \leqslant x$.

证明 取 $a = 0 * (0 * x)$, 由定理 2.1.6 知, a 为极小元, 并且显然

$$a = 0 * (0 * x) \leqslant x.$$ 证毕

定义 2.1.5 在 BCI–代数 X 中, 如果 $0 \leqslant x$, 则称 x 为 X 中的正元, 把正元之集

$$\{x \in X \,|0 \leqslant x\}$$

叫做 X 的 BCK–部分, 记为 KP(X).

显然, $0 \in \mathrm{KP}(X)$ 且 $x \in \mathrm{KP}(X) \Leftrightarrow 0 * x = 0$.

定理 2.1.7 设 X 是 BCI–代数, 则 KP(X) 对运算 “$*$” 封闭, 从而 KP(X) 是 X 的子代数, 并且 (KP(X), $*$, 0) 是 BCK–代数.

证明 $\forall x, y \in \mathrm{KP}(X)$ 有 $0 * x = 0 * y = 0$. 由式 (2.1.13) 得

$$0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y) = 0 * 0 = 0,$$

故 KP(X) 对运算 $*$ 封闭. 又由于 $0 * x = 0$, 故 (KP(X), $*$, 0) 是 BCK–代数. 证毕

孟杰和辛小龙把 BCI- 部分推广成如下更一般的概念:

定义 2.1.6 设 x_0 为 X 的极小元, 把集合

$$V(x_0) = \{x \in X \,|x_0 \leqslant x\}$$

叫做 X 关于 x_0 的分支.

显然, $V(0)=\mathrm{KP}(X)$.

定理 2.1.8 在 BCI-代数 X 中, x,y 属于同一分支 $\Leftrightarrow x*y\in\mathrm{KP}(X)$.

证明 $\forall x,y\in V(x_0)$, 由于 x_0 为极小元, 故 $x_0\leqslant x$, $x_0\leqslant y$, 即

$$x_0*x=y_0*y=0,$$

则

$$\begin{aligned}0*(x*y)&=(0*x)*(0*y)\\&=((x_0*x_0)*x)*((x_0*x_0)*y)\\&=((x_0*x)*x_0)*((x_0*y)*x_0)\\&=(0*x_0)*(0*x_0)=0,\end{aligned}$$

故 $x*y\in\mathrm{KP}(X)$.

反过来, 如果 $x*y\in\mathrm{KP}(X)$, 则

$$0*(x*y)=(0*x)*(0*y)=0,$$

即 $0*x\leqslant 0*y$, 但 $0*y$ 为极小元, 故 $0*x=0*y$.

取 $x_0=0*(0*x)$, 则由定理 2.1.6 知, x_0 为极小元, 并且由 $x_0=0*(0*x)\leqslant x$ 知 $x\in V(x_0)$, 但由

$$x_0*y=(0*(0*x))*y=(0*y)*(0*x)=0$$

得 $x_0\leqslant y$, 即 $y\in V(x_0)$, 故 x,y 属于同一分支 $V(x_0)$. 证毕

定理 2.1.9 BCI–代数 X 中的每个元素属于且只属于一个分支.

证明 $\forall x\in X$, 取 $x_0=0*(0*x)$, 则 x_0 为极小元, 并且 $x_0\leqslant x$, 即 $x\in V(x_0)$.

如果还存在极小元 $y_0\in X$, 使得 $x\in V(y_0)$, 即 $y_0\leqslant x$, 则由式 (2.1.8) 得

$$0*x\leqslant 0*y_0.$$

但

$$(0*y_0)*(0*x)=0*(y_0*x)=0*0=0,$$

故 $0*x=0*y_0$.

同理, 由 x_0 也为极小元, 并且 $x\in V_{x_0}$, 则得 $0*x=0*x_0$, 从而

$$0*x_0=0*y_0,$$

故

$$0*(0*x_0)=0*(0*y_0).$$

由于 x_0, y_0 为极小元, 所以由定理 2.1.6 得 $x_0 = y_0$, 从而 $C_{x_0} = C_{y_0}$. 证毕

推论 2.1.4 BCI–代数 X 的所有极小元的分支组成了 X 的一个分类.

推论 2.1.5 BCI–代数 X 的两个不同极小元的分支不交.

推论 2.1.6 设 $\mathrm{KP}(X)$ 为 X 的 BCK–部分, 规定

$$x \sim y \Leftrightarrow x * y \in \mathrm{KP}(X),$$

则 "$\sim$" 为 X 上的等价关系.

证明 由于所有分支是 X 的一个分类, 于是该分类决定的等价关系为 $x \sim y \Leftrightarrow$ x, y 属于同一类, 但由定理 2.1.8 知, x, y 属于同一类 $\Leftrightarrow x * y \in \mathrm{KP}(X)$. 证毕

2.2 BCK–代数及其偏序

定义 2.1.1 表明, 满足 $0 * x = 0 (\forall x \in X)$ 的 BCI–代数即为 BCK–代数, 本节讨论 BCK–代数的基本性质.

2.2.1 BCK–代数的基本性质

首先, 讨论 BCK–代数的等价定义.

设 $(X, *, 0)$ 是 BCK–代数, $\forall x, y \in X$, 则 $0 * y = 0$. 再由 (2.1.6) 得

$$x * (0 * y) = x * 0 = x,$$

即

$$x * (0 * y) = x. \tag{2.2.1}$$

反过来, 如果代数 $(X, *, 0)$ 满足 (2.1.1), (2.1.4), (2.2.1), 则有

$$\begin{aligned} 0 * x &= (0 * x) * (0 * x) \\ &= ((0 * x) * (0 * 0)) * (0 * x) = 0, \end{aligned}$$

进而得

$$x * 0 = x * (0 * x) = x.$$

由定义 2.1.2 知, X 是 BCI–代数. 又由于 $0 * x = 0$, 故 X 是 BCK–代数, 从而可给出如下 BCK–代数的等价定义:

定义 2.2.1 设集合 X 上有二元运算 "$*$" 及常元 0, 如果 $\forall x, y, z \in X$, 有

(1) $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$;

(2) $x * (0 * y) = x$;

(3) $x * y = 0$, 且 $y * x = 0 \Rightarrow x = y$,

则称 X 关于二元运算 "$*$" 及常元 0 为一个 BCK–代数.

由于 BCK-代数是一类特殊的 BCI–代数, 所以 2.1 节中的性质全部适应于 BCK-代数. 除此之外, 还有如下定理:

定理 2.2.1　在 BCK–代数 X 中, $\forall x, y, z \in X$, 有

(1) $(x * y) * x = 0$, 即 $x * y \leqslant x$; (2.2.2)

(2) $x * (x * y) = 0 \Leftrightarrow x = x * y$; (2.2.3)

(3) $x \geqslant x * y \geqslant x * y^2 \geqslant \cdots \geqslant x * y^n \geqslant \cdots$. (2.2.4)

证明　(1) $(x * y) * x = (x * x) * y = 0 * y = 0$.

(2) 如果 $x * (x * y) = 0$, 即 $x \leqslant x * y$. 又由 (2.2.2) 知 $x * y \leqslant x$, 故 $x = x * y$.

反过来, 如果 $x = x * y$, 则显然有 $x * (x * y) = x * x = 0$.

(3) 设 n 为任意正整数, 则由 (2.2.2) 得

$$x^* y^{n+1} = (x * y^n) * y \leqslant x * y^n.$$

证毕

2.2.2　BCK–代数的自然偏序

由 2.1 节的讨论可知, 在 BCI–代数 X 中, 规定 $x \leqslant y \Leftrightarrow x * y = 0$, 则 "$\leqslant$" 是 X 上的自然偏序, 并且 0 为该偏序集中的极小元. 在 BCK–代数中, 这样的偏序有什么特征呢?

定理 2.2.2　设 X 是 BCI–代数, 则 X 是 BCK 代数 $\Leftrightarrow$ 0 为自然偏序 "$\leqslant$" 的最小元.

证明　如果 X 是 BCK–代数, 则由 (2.1.5) 知, $\forall x \in X$ 有 $0 * x = 0$, 即 $0 \leqslant x$, 从而 0 为最小元.

反过来, 如果 0 为最小元, 则 $\forall x \in X$, $0 \leqslant x$, 则必有 $0 * x = 0$, 即 X 是 BCK–代数.

证毕

定理 2.2.2 表明, 从偏序的角度来看, BCI–代数与 BCK–代数的区别在于: 在 BCI-代数中, 0 为极小元; 而在 BCK–代数中, 0 为最小元.

既然 BCK- 代数 $(X, *, 0)$ 决定一个 0 为最小元的偏序集, 反过来, 一个有最小元的偏序集能否决定一个 BCK–代数?

定理 2.2.3　设 $(X, \leqslant)$ 是偏序集, 0 为 X 的最小元, 令

$$x * y = \begin{cases} 0, & x \leqslant y, \\ x, & \text{否则}, \end{cases}$$

则 $(X, *, 0)$ 是 BCK-代数, 称之为偏序集 $(X, \leqslant)$ 的自然 BCK–代数.

证明　首先, 由于 0 是最小元, $\forall x \in X$, 则必有 $0 \leqslant x$, 即 $0 * x = 0$, 从而只要证明 $(X, *, 0)$ 是 BCI–代数, 就必是 BCK–代数. 任取 $x, y, z \in X$.

(1) 如果 $x \leqslant 0$, 由于 0 为最小元, 故 $x = 0$, 从而 $x*0 = 0*0 = 0 = x$; 如果 $x \nleqslant 0$, $x*0 = x$. 总之, 对 $\forall x \in X$, $x*0 = x$.

(2) 如果 $x \leqslant y$, 则 $x*y = 0$, 于是有

$$((x*y)*(x*z))*(z*y) = (0*(x*z))*(z*y) = 0*(z*y) = 0.$$

如果 $x \nleqslant y$, 但 $x \leqslant z$, 则 $z \nleqslant y$, 从而

$$x*y = x, x*z = 0, z*y = z,$$

于是有

$$((x*y)*(x*z))*(z*y) = (x*0)*z = x*z = 0.$$

如果 $x \nleqslant y$, 且 $x \nleqslant z$, 即 $x*y = x$, $x*z = x$, 则有

$$((x*y)*(x*z))*(z*y) = (x*x)*(z*y) = 0*(z*y) = 0.$$

(3) 如果 $x*y = y*x = 0$, 即 $x \leqslant y$ 或 $x = 0$, 并且 $y \leqslant x$ 或 $y = 0$.

如果 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x$, 由于 $\leqslant$ 为偏序, 故 $x = y$; 如果 $x \leqslant y$ 且 $y = 0$, 由于 0 是最小元, 故 $x = 0 = y$; 如果 $x = 0$, 且 $y \leqslant x$, 则得 $y \leqslant 0$, 但 0 为最小元, 故 $y = 0 = x$; 如果 $x = 0$ 且 $y = 0$, 则显然, $x = y$.

由定义 2.1.2 可见, $(X,*,0)$ 必是 BCI–代数, 但由于 $0*x = 0$, 故 $(X,*,0)$ 是 BCK–代数, 并且 0 为它的零元. 证毕

定理 2.2.3 表明, 每个有最小元的偏序集也决定一个 BCK–代数.

更进一步地, 设 $(X,\leqslant)$ 是以 0 为最小元的偏序集, 它决定的 BCK–代数为 $(X,*,0)$, 则该 BCK–代数的自然偏序是什么?

定理 2.2.4 设 $(X,\leqslant)$ 是以 0 为最小元的偏序集, $(X,*,0)$ 是它的自然 BCK 代数, 则这个 BCK–代数的自然偏序正是 "$\leqslant$".

证明 设 $(X,*,0)$ 的自然偏序为 "$\leqslant'$", 则 $x \leqslant' y \Leftrightarrow x*y = 0$. 如果 $x \leqslant y$, 则 $x*y = 0$, 必有 $x \leqslant' y$. 反过来, 如果 $x \leqslant' y$, 则有 $x*y = 0$. 假若 $x \nleqslant y$, 则 $x*y = x = 0$, 从而 $0 \nleqslant y$, 这与 0 为最小元矛盾, 从而 $x \leqslant y$, 即得 $x \leqslant y \Leftrightarrow x \leqslant' y$. 证毕

定理 2.2.5 设 BCK–代数 $(X,*,0)$ 满足 $x*(x*y) = 0$, $\forall x,y \in X$, 它的自然偏序集是 $(X,\leqslant)$, 则它的自然 BCK 代数为 $(X,*,0)$.

证明 设 $(X,\leqslant)$ 的自然 BCK-代数为 $(X,*',0)$, $\forall x,y \in X$,

(1) 若 $x \leqslant y$, 则 $x*y = 0$, $x*'y = 0$. 从而 $x*y = x*'y$.

(2) 若 $x \nleqslant y$, 则 $x*'y = x$, $x*y \neq 0$. 由于 $x*(x*y) = 0$, 故 $x \leqslant x*y$, 但

$$(x*y)*x = (x*x)*y = 0*y = 0,$$

故 $x*y = x$, 即 $x*y = x*'y$. 证毕

2.2.3 对合 BCK–代数

BCK–代数以 0 为最小元, 下面考虑它的最大元.

定义 2.2.2 在 BCK–代数 X 中, 如果存在 $1 \in X$, 使得 $\forall x \in X$ 有 $x \leqslant 1$, 则称 1 为 X 的最大元. 存在最大元的 BCK–代数叫有界的, 并记

$$Nx = 1 * x.$$

例 2.2.1 设 $X \neq \varnothing$, $(P(X), -, \varnothing)$ 就是有界 BCK–代数, 其中最大元为 X.

例 2.2.2 设 $X = \{0, 1, 2, 3\}$, 其上的 "$*$" 运算为

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	1	0	2
3	3	3	3	0

容易验证, $(X, *, 0)$ 是 BCK–代数, 其中 0, 1, 2, 3 都不是上界, 从而 X 无上界.

如果 1 和 $1'$ 都是 BCK–代数的最大元, 则由 $1 \leqslant 1'$, $1' \leqslant 1$ 得 $1 = 1'$, 从而有界 BCK–代数的上界必唯一.

定理 2.2.6 设 1 为有界 BCK–代数的上界, $\forall x, y \in X$ 有

(1) $N1 = 0$, $N0 = 1$;

(2) $NNx \leqslant x$ $(NNx = N(Nx)$;

(3) $Nx * Ny \leqslant y * x$;

(4) $y \leqslant x \Rightarrow Nx \leqslant Ny$;

(5) $(Nx) * y = (Ny) * x$;

(6) $NNNx = Nx$.

证明 (1) $N1 = 1 * 1 = 0$, $N0 = 1 * 0 = 1$.

(2) $NNx = 1 * (1 * x) \leqslant x$.

(3) $Nx * Ny = (1 * x) * (1 * y) \leqslant y * x$.

(4) $y \leqslant x \Rightarrow 1 * x \leqslant 1 * y \Rightarrow Nx \leqslant Ny$.

(5) $(Nx) * y = (1 * x) * y = (1 * y) * x = (Ny) * x$.

(6) $NNNx = 1 * (1 * (1 * x)) = 1 * x = Nx$. 证毕

定义 2.2.3 设 X 是有界 BCK–代数, $x \in X$, 如果

$$NNx = x,$$

则称 x 为对合元. 如果 X 中的每个元都是对合元, 则称 X 为对合 BCK–代数.

定理 2.2.7 设 X 是 BCK–代数, $\forall x, y \in X$, 则以下命题等价:

(1) X 是对合的;

(2) $x*y=Ny*Nx$;

(3) $x*Ny=y*Nx$;

(4) $x\leqslant Ny\Rightarrow y\leqslant Nx$.

证明 (1)⇒(2) 由定理 2.2.6 知

$$x*y=(NNx)*y=Ny*Nx.$$

(2)⇒(3) $x*Ny=(NNx)*(Ny)=(NNy)*(Nx)=y*Nx$.

(3)⇒(4) 由 $x\leqslant Ny$ 知 $x*Ny=0$, 故 $y*Nx=x*Ny=0$, 从而 $y\leqslant Nx$.

(4)⇒(1) 由定理 2.2.6 知 $NNx\leqslant x$. 又有 $Nx\leqslant Nx$ 知 $x\leqslant NNx$, 故 $NNx=x$, 即 X 是对合的. 证毕

2.2.4 可换 BCK-代数

设 X 是 BCK-代数, $\forall x,y\in X$, 规定

$$x\wedge y=y*(y*x).$$

由于

$$x\wedge y=y*(y*x)\leqslant x,\quad x\wedge y=y*(y*x)\leqslant y,$$

故 $x\wedge y$ 必是 x,y 的下界, 并且显然

$$0\wedge x=x\wedge 0=0, x\wedge x=x,$$

但注意一般地, $x\wedge y\neq y\wedge x$.

例 2.2.3 设 $X=\{0,1,2,3\}$, 运算 “$*$” 规定如下:

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	1	0	2
3	3	0	0	0

则容易验证, $(X,*,0)$ 是 BCK-代数, 其中

$$1\wedge 3=3*(3*1)=3*0=3,$$

$$3\wedge 1=1*(1*3)=1*1=0,$$

故 $1\wedge 3\neq 3\wedge 1$.

K. Iséki 引入了如下概念:

定义 2.2.4 在 BCK–代数 X 中, 如果 $\forall x, y \in X$ 有

$$x \wedge y = y \wedge x,$$

则称 X 为可换 BCK–代数.

例 2.2.4 取 N 为非负整数集合, $\forall x, y \in \mathbf{N}$, 定义

$$x * y = \begin{cases} 0, & x < y, \\ x - y, & x \geqslant y. \end{cases}$$

由例 2.1.2 知, $(\mathbf{N}, *, 0)$ 是 BCK–代数.

当 $x \leqslant y$ 时,

$$x \wedge y = y * (y * x) = x, \quad y \wedge x = x * (x * y) = x;$$

当 $y < x$ 时,

$$x \wedge y = y * (y * x) = y, \quad y \wedge x = x * (x * y) = y.$$

故 $\forall x, y \in \mathbf{N}$ 有

$$x \wedge y = y \wedge x,$$

即 $(\mathbf{N}, *, 0)$ 是可换 BCK–代数.

定理 2.2.8 BCK–代数 X 是可换的 $\Leftrightarrow$ $(X, \wedge)$ 是下半格.

证明 如果 $(X, \wedge)$ 是下半格, 则由定理 1.1.7 知, $\forall x, y \in X$, $x \wedge y = y \wedge x$, 从而 X 是可换的.

如果 X 可换, 则 $\forall x, y \in X$ 显然有

$$x \wedge y = y * (y * x) \leqslant x, \quad x \wedge y = y * (y * x) \leqslant y,$$

故 $x \wedge y$ 为 x, y 的下界. 设 z 为 x, y 的任一下界, 即 $z \leqslant x$, $z \leqslant y$, 从而 $z * x = 0$, $z * y = 0$, 故得

$$z \wedge y = y \wedge z = z * (z * y) = z * 0 = z,$$

$$\begin{aligned} z * (x \wedge y) &= (z \wedge y) * (x \wedge y) \\ &= (y * (y * z)) * (y * (y * x)) \\ &= (y * (y * (y * x))) * (y * z) \\ &= (y * x) * (y * z) \leqslant z * x = 0, \end{aligned}$$

从而 $z * (x \wedge y) = 0$, 即 $z \leqslant x \wedge y$, 于是 $x \wedge y$ 是 x, y 的下确界, 即 $(X, \wedge)$ 是下半格.

证毕

定理 2.2.9 BCK–代数 X 是可换的 $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X$, 由 $x, y \leqslant z$, $z * y \leqslant z * x$ 可以推出 $x \leqslant y$.

证明 $\Rightarrow$ $\forall x, y \in X$, 设 $x, y \leqslant z$, $z * y \leqslant z * x$, 即

$$x * z = y * z = 0, \quad (z * y) * (z * x) = 0,$$

则

$$\begin{aligned} x * y &= (x * 0) * (y * 0) = (x * (x * z)) * (y * (y * z)) \\ &= (z \wedge x) * (z \wedge y) = (x \wedge z) * (y \wedge z) \\ &= (z * (z * x)) * (z * (z * y)) \\ &= (z * (z * (z * y))) * (z * x) \\ &= (z * y) * (z * x) = 0, \end{aligned}$$

故 $x \leqslant y$.

$\Leftarrow$ $\forall x, y \in X$, 由于 $x \wedge y$, $y \wedge x \leqslant x, y$, 则有

$$y * (x \wedge y) = y * (y * (y * x)) = y * x \leqslant y * (y \wedge x),$$

由已知条件得

$$y \wedge x \leqslant x \wedge y.$$

交换 x, y 得 $x \wedge y \leqslant y \wedge x$, 从而 $x \wedge y = y \wedge x$. 证毕

2.3 BCI–代数中元素的阶

已经知道, 群和环中的元素都有阶的概念, 并且在群论和环论中起着重要的作用. 在 BCI 代数中, 张富林和林大华也相继引入了元素的阶数或周期的概念, 杨闻起曾给出它们的更进一步的性质.

2.3.1 概念和例子

在 2.1 节中, 有以下记号:

$$x * y^0 = x,$$

$$x * y^n = (\cdots((x * \underbrace{y) * y) * \cdots) * y}_{n\text{次}}.$$

定义 2.3.1 在 BCI 代数 X 中, $x \in X$, 把满足 $0 * x^n = 0$ 的最小正整数 n 叫做元素 x 的阶, 记为 $|x|$.

如果对任意正整数 n 都有 $0 * x^n \neq 0$, 则称 x 的阶为无穷大, 记为 $|x| = \infty$.

显然, 0 的阶为 1, BCK 代数中任一元素的阶都为 1. 反过来, 所有元素阶为 1 的 BCI 代数必是 BCK–代数.

例 2.3.1 设 $X = \{0, 1, 2, 3\}$, 运算 “$*$” 规定为

*	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

则由例 2.1.4 可知, $(X,*,0)$ 是 BCI–代数. 可以验证 $|0|=1$, $|1|=4$, $|2|=2$, $|3|=2$.

2.3.2 阶的性质

定理 2.3.1 在有限 BCI–代数 X 中, 每个元素的阶都有限.

证明 设 X 是有限 BCI–代数, 假设存在 $x\in X$, 使得 $|x|=\infty$, 则无限元素列

$$0*x,\quad 0*x^2,\quad \cdots,\quad 0*x^n,\quad \cdots$$

中的每个元素都非零. 由于 X 有限, 故这个元素列中必有重复元素. 假设 $0*x^k=0*x^l(k>l)$, 则由式 (2.1.17) 知

$$0=(0*x^k)*(0*x^l)=0*x^{k-l},$$

这与 $|x|=\infty$ 矛盾. 证毕

定理 2.3.2 在 BCI–代数 X 中, $\forall x\in X$ 有

$$|0*x|=|x|.$$

证明 如果 $0*x^n=0$, 则由式 (2.1.15) 知

$$0*(0*x)^n=0*(0*x^n)=0*x^n=0.$$

反过来, 如果 $0*(0*x)^n=0$, 则由式 (2.1.19) 和 (2.1.15) 知

$$0*x^n=0*(0*(0*x^n))=0*(0*(0*x)^n)=0*0=0,$$

所以

$$0*x^n=0\Leftrightarrow 0*(0*x)^n=0,$$

从而 $|x|=|0*x|$. 证毕

定理 2.3.3 在 BCI–代数 X 中, $\forall x,y\in X$, 有

$$|x*y|=|y*x|.$$

证明 由式 (2.1.13), (2.1.8), (2.1.12) 得

$$0*(0*(x*y))=(0*(0*x))*(0*(0*y))$$

$$= (0*(0*(0*y)))*(0*x)$$
$$= (0*y)*(0*x) = 0*(y*x).$$

再由定理 2.3.2 得

$$|x*y| = |0*(x*y)| = |0*(0*(x*y))| = |0*(y*x)| = |y*x|.$$ 证毕

定理 2.3.4 在 BCI-代数 X 中, 如果 $|x|=n$, 则

$$0*x^m = 0 \Leftrightarrow n\,|m\,.$$

证明 设 $0*x^m=0$, 并且 $m=qn+r\ (0\leqslant r<n)$, 则有

$$\begin{aligned}0*x^m = 0*x^{qn+r} &= (0*x^{qn})*x^r\\ &= ((\cdots((0*\underbrace{x^n)*x^n)*\cdots)*x^n)}_{q\text{次}}*x^r\\ &= 0*x^r = 0.\end{aligned}$$

但由于 $|x|=n$, 即 n 为满足 $0*x^n=0$ 的最小正整数, 故 $r=0$, 从而 $n\,|m$.

反过来, 设 $n\,|m$, 即令 $m=qn$, 由于 $0*x^n=0$, 则

$$0*x^m = (\cdots(0*x^n)*\cdots)*x^n = 0.$$ 证毕

定理 2.3.5 在 BCI-代数 X 中, $\forall x,y\in X$, 有

$$|x*y|\,|n \Leftrightarrow 0*x^n = 0*y^n.$$

证明 设 $|x*y|\,|n$, 则由定理 2.3.4 知 $0*(x*y)^n=0$. 再由式 (2.1.16) 知

$$(0*x^n)*(0*y^n) = 0*(x*y)^n = 0,$$

从而

$$0*x^n \leqslant 0*y^n.$$

由定理 2.3.3 知 $|x*y|=|y*x|$. 以上证明中 x,y 互换得

$$0*y^n \leqslant 0*x^n,$$

从而

$$0*x^n = 0*y^n.$$

反过来, 设 $0 * x^n = 0 * y^n$, 则由式 (2.1.16) 得

$$0 * (x * y)^n = (0 * x^n) * (0 * y^n) = 0.$$

再由定理 2.3.4 知 $|x * y|\,|n$. 证毕

定理 2.3.6 在 BCI–代数 X 中, $x, y \in X$, 如果 $|x| = m$, $|y| = n$, 则 $|x * y|\,|mn$. 特别地, 如果 $(m, n) = 1$, 则 $|x * y| = mn$.

证明 由于 $|x| = m$, $|y| = n$, 故 $0 * x^n = 0$, $0 * y^n = 0$. 由定理 2.3.4 得

$$0 * x^{mn} = 0, \quad 0 * y^{mn} = 0.$$

再由式 (2.1.16) 得

$$0 * (x * y)^{mn} = (0 * x^{mn}) * (0 * y^{mn}) = 0 * 0 = 0,$$

从而 $|x * y|\,|mn$.

特别地, 再设 $(m, n) = 1$, $|x * y| = s$, 即 $0 * (x * y)^s = 0$. 由定理 2.3.4 和式 (2.1.16) 得

$$0 = 0 * (x * y)^{ms} = (0 * x^{ms}) * (0 * y^{ms}) = 0 * (0 * y^{ms}).$$

由式 (2.1.11) 得

$$0 = 0 * 0 = 0 * (0 * (0 * y^{ms})) = 0 * y^{ms}.$$

由于 $|y| = n$, 由定理 2.3.4 得 $n\,|ms$, 但 $(m, n) = 1$, 故 $n\,|s$.

同理可得 $m\,|s$, 但 $(m, n) = 1$, 故 $mn\,|s$. 又由 $s\,|mn$ 知, $s = mn$. 证毕

定理 2.3.7 在 BCI-代数 X 中, $x \in X$, k 为任意正整数. 如果 $|x| = n$, 则

$$\left|0 * x^k\right| = \frac{n}{(k, n)},$$

其中 (k, n) 为 k, n 的最大公因数.

证明 设 $(k, n) = d$, 其中 $n = dn_1$, $k = dk_1$ 且 $(k_1, n_1) = 1$, 则由式 (2.1.15) 得

$$0 * (0 * x^k)^{n_1} = 0 * (0 * x^{kn_1}) = 0 * (0 * x^{nk_1}) = 0 * 0 = 0,$$

故 $\left|0 * x^k\right|\,|n_1$.

设 $0 * (0 * x^k)^m = 0$, 由式 (2.1.12), (2.1.15) 得

$$0 * x^{km} = 0 * (0 * (0 * x^{km})) = 0 * (0 * (0 * x^k)^m) = 0 * 0 = 0.$$

由定理 2.3.4 得 $n\,|km$, 但 $n = dn_1$, $k = dk_1$ 故 $n_1|k_1 m$. 但 $(n_1, k_1) = 1$, 故 $n_1\,|m$, 即 $n_1 \leqslant m$, 从而有

$$\left|0 * x^k\right| = n_1 = \frac{n}{(n, k)}.$$

证毕

定理 2.3.8 如果 BCI-代数 X 中所有非零元都有相同的阶, 则这个相同的阶或者为素数, 或者为 ∞.

证明 设 X 中所有非零元的共同阶为 $n<\infty$, 即 $\forall x\in X, x\neq 0$ 有 $|x|=n$. 假设 n 不是素数, 则可设 $n=n_1n_2(1<n_1,n_2<n)$. 由定理 2.3.7 知

$$|0*x^{n_1}|=\frac{n}{(n_1,n)}=\frac{n}{n_1}=n_2<n,$$

但由于所有非零元的阶都为 n, 故 $0*x^{n_1}=0$, 从而 $|x|\leqslant n_1<n$, 矛盾. 证毕

定理 2.3.9 如果 BCI-代数 X 的所有元素都有最大阶 m, 则每个元素的阶都是 m 的因数, 从而 $\forall x\in X$ 有 $0*x^m=0$.

证明 设 $|a|=m$ 为最大阶, $\forall x\in X$, 设 $|x|=n\leqslant m$, 假设 $n\nmid m$, 则存在素数 p, 使得

$$m=p^km_1,\quad p\nmid m_1,$$

$$n=p^tn_1,\quad t>k.$$

由于 $|a|=m, |x|=n$, 于是由定理 2.3.7 得

$$\left|0*a^{p^k}\right|=\frac{m}{(m,p^k)}=m_1,\quad |0*x^{n_1}|=\frac{n}{(n_1,n)}=p^t.$$

由于 p 为素数且 $p\nmid m_1$, 故 $(m_1,p^t)=1$. 由定理 2.3.6 得

$$\left|(0*a^{p^k})*(0*x^{n_1})\right|=m_1p^t>m,$$

这与 m 为最大阶矛盾, 从而 $n|m$. 再由定理 2.3.4 得 $0*x^m=0$. 证毕

定理 2.3.10 在 BCI 代数 X 中, 同一分支中的元素有相同的阶.

证明 设 x_0 为 X 中任一极小元, $V(x_0)=\{x\in X\,|x_0\leqslant x\}$.$\forall x,y\in X$ 有 $x_0\leqslant x$, 所以 $0*x\leqslant 0*x_0$, 于是有

$$(0*x_0)*(0*x)=0*(x_0*x)=0*0=0,$$

从而

$$0*x=0*x_0,$$

故对任意正整数 k 都有

$$0*x^k=0*x_0^k,$$

从而 $|x|=|x_0|$. 证毕

2.3.3 诣零 BCI–代数

定义 2.3.2　设 x 是 BCI–代数 X 中的元素, 如果存在正整数 k, 使得 $0*x^k=0$, 则称 x 为诣零元. 用 $N(X)$ 表示 X 中的所有诣零元的集合. 如果 $N(x)=X$, 则称 X 为诣零 BCI–代数.

显然, 0 必是诣零元, 并且 x 是诣零元 $\Leftrightarrow |x|$ 有限.

由于有限 BCI–代数中每个元的阶都有限, 故有限 BCI–代数必为诣零的.

另外, 在 BCK–代数中, $\forall x\in X$, $0*x=0$, 故 BCK–代数是诣零的.

定理 2.3.11　若 X 是 BCI–代数, 则 $N(X)$ 是 X 的子代数.

证明　显然, $0\in N(X)$. $\forall x,y\in N(X)$, 则存在正整数 k,l, 使得

$$0*x^k=0,\quad 0*y^l=0.$$

由式 (2.1.16) 得

$$0*(x*y)^{kl}=(0*x^{kl})*(0*y^{kl})=0*0=0\Rightarrow x*y\in N(X),$$

从而 $N(X)$ 是 X 的子代数.　　证毕

定理 2.3.12　BCI 代数 X 是诣零的当且仅当每个极小元都是诣零元.

证明　$\Rightarrow$　显然成立.

$\Leftarrow$　$\forall x\in X, 0*x$ 为极小元, 从而 $0*x$ 为诣零元, 故存在正整数 k, 使得

$$0*(0*x)^k=0,$$

从而 $0*(0*x^k)=0$. 由式 (2.1.15) 和 (2.1.19) 得

$$0*x^k=0*(0*(0*x^k))=0*0=0,$$

故 x 为诣零元, 从而 X 是诣零的.　　证毕

2.4 理想与滤子

就像环和半群一样, 理想也是 BCI–代数的重要概念. 最早由 K. Iséki 引入了 BCI–代数的理想, 后来许多人作了大量的研究, 得到了许多性质, 并引入了闭理想、关联理想和右理想等. 杨闻起在此基础上引入了 BCI–代数的滤子, 并讨论了它的性质.

2.4.1 理想

K. Iséki 关于 BCI–代数的理想的定义如下:

定义 2.4.1　设 $(X,*,0)$ 是 BCI–代数, I 是 X 的非空子集. 如果

(1) $0 \in I$;

(2) $\forall x, y \in X$, 由 $y * x \in I$, $x \in I$ 可以推出 $y \in I$,

则称 I 为 X 的理想.

在任意 BCI–代数 X 中, $X, \{0\}$ 显然是 X 的理想, 称之为 X 的平凡理想. 特别地, 把理想 $\{0\}$ 叫做 X 的零理想. 记为 0. 如果 X 除了平凡理想再无其他理想, 则称 X 为单 BCI–代数.

例 2.4.1 在非零有理数集合 $\mathbf{Q}^*$ 中, 取运算为普通除法, 则 $(\mathbf{Q}^*, \div, 1)$ 是 BCI–代数. 取 $\mathbf{Z}^*$ 为非零整数集合, 容易验证, $\mathbf{Z}^*$ 是 $\mathbf{Q}^*$ 的理想, 但由于 $\mathbf{Z}^*$ 对除法不封闭, 故 $\mathbf{Z}^*$ 不是 $\mathbf{Q}^*$ 的子代数.

例 2.4.1 说明, 一般地, BCI–代数的理想未必是子代数, 这与半群、环和半环的理想有所不同.

例 2.4.2 取 $X = \{0, 1, 2, 3\}$, 运算"$*$"规定如下:

$*$	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

容易验证, $(X, *, 0)$ 是 BCI 代数, $I = \{0, 2\}$ 既是 X 的理想, 也是 X 的子代数.

例 2.4.3 设 G 是加群, 则 $(G, -, 0)$ 是 BCI–代数, G 的子群 H 是该 BCI–代数的理想.

定理 2.4.1 设 I 是 BCI–代数 X 中包含 0 的子集, 则 I 是 X 的理想当且仅当 $\forall x \notin I, \forall y \in I$ 有 $x * y \notin I$.

证明 如果 I 是 X 的理想, $\forall x \notin I, \forall y \in I$, 假设 $x * y \in I$, 由定义 2.4.1 得 $x \in I$, 矛盾, 故 $x * y \notin I$. 反过来, 显然也成立. 证毕

定理 2.4.2 设 I 是 BCI–代数的理想, 如果 $x \leqslant y \in I$, 则 $x \in I$.

证明 由于 $x \leqslant y$, 故 $x * y = 0 \in I$. 由于 $y \in I$, I 为理想, 从而 $x \in I$. 证毕

定理 2.4.2 表明, BCI–代数的理想必是它的自然偏序集的理想.

定理 2.4.3 设 X 是 BCI–代数, 则 I 是 X 的理想 $\Leftrightarrow \forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in I$, 由 $(\cdots(x * a_1) * \cdots) * a_n \in I$ 可以推出 $x \in I$.

证明 $\Leftarrow$ 显然成立.

$\Rightarrow$ 由 $(\cdots(x * a_1) * \cdots) * a_n \in I$, $a_n \in I$ 得

$$(\cdots(x * a_1) * \cdots) * a_{n-1} \in I,$$

重复以上做法可得 $x \in I$. 证毕

定理 2.4.4　设 $\{I_k | k \in D\}$ 是 BCI 代数 X 的一族理想, 那么

(1) $\bigcap\limits_{k\in D} I_k$ 是 X 的理想;

(2) 如果 $I_k(k \in D)$ 两两可比较, 则 $\bigcup\limits_{k\in D} I_k$ 也是 X 的理想.

证明　(1) 设 $I = \bigcap\limits_{k\in D} I_k$, 由于 $\forall k \in D, 0 \in I_k$, 故 $0 \in I$. 设 $y * x \in I, x \in I$, 则 $\forall k \in D$ 有 $y * x \in I_k, x \in I_k$. 由于 I_k 为 X 的理想, 则 $y \in I_k$. 由 k 的任意性得 $y \in I$, 从而 I 是 X 的理想.

(2) 设 $J = \bigcup\limits_{k\in D} I_k$, 显然, $0 \in J$. 设 $y * x \in J, x \in J$, 则存在 $k_1, k_2 \in D$, 使得 $y * x \in I_{k_1}, x \in I_{k_2}$. 由于 I_{k_1}, I_{k_2} 可比较, 不妨取 $I_{k_1} \subseteq I_{k_2}$, 则 $y * x, x \in I_{k_2}$, 但 I_{k_2} 是 X 的理想, 故 $y \in I_{k_2} \subseteq J$, 从而 J 是 X 的理想.　　证毕

2.4.2　生成理想和主理想

设 A 是 BCI–代数 X 的非空子集, 则由定理 2.4.4 知, 包含 A 的全部理想之交是 X 的理想, 它显然是包含 A 的最小理想.

定义 2.4.2　设 A 是 BCI–代数 X 的非空子集, 则把包含 A 的全部理想之交叫做 A 生成的理想, 记为 $(A]$. 如果 $A = \{a\}$, 则把 A 生成的理想叫做元素 a 生成的主理想, 记为 $(a]$.

定理 2.4.5　设 A 是 BCI–代数 X 的非空子集, $A^* = A \cup \{0\}$, 则 A 生成的理想为

$$(A] = \{x \in X |\ 存在 a_1, a_2, \cdots, a_n \in A^*, 使得 (\cdots((x * a_1) * a_2) * \cdots) * a_n = 0\}.$$

证明　设 I 表示等式右端的集合, $\forall a \in A$, 由于 $a * a = 0$, 故 $a \in I$, 从而 $A \subseteq I$. 又由于 $0 * 0 = 0$, 故 $0 \in I$.

设 $x \in I, y * x \in I$, 则存在 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m \in A^*$, 使得

$$(\cdots(x * a_1) * \cdots) * a_n = 0,$$

$$(\cdots((y * x) * b_1) * \cdots) * b_m = 0,$$

从而得

$$((\cdots(y * b_1) * \cdots) * b_m) * x = (\cdots((y * x) * b_1) * \cdots *) b_m = 0,$$

即

$$(\cdots(y * b_1) * \cdots) * b_m \leqslant x.$$

由式 (2.1.8) 得

$$(\cdots(((\cdots(y * b_1) * \cdots) * b_m) * a_1) * \cdots) * a_n \leqslant (\cdots(x * a_1) * \cdots) * a_n = 0,$$

故 $y \in I$, 从而 I 是 X 的理想.

设 J 是包含 A 的任意理想, $\forall x \in I$, 取 $a_1, \cdots, a_n \in A^*$, 使得

$$(\cdots(x * a_1) * \cdots) * a_n = 0 \in I.$$

由于 $a_1, \cdots, a_n \in A^* \subseteq J$, 故由定理 2.4.3 知 $x \in J$ 从而 $I \subseteq J$, 所以 I 是包含 A 的最小理想, 即 $I = (A]$. 证毕

由定理 2.4.5 显然可得到如下推论:

推论 2.4.1 设 a 是 BCI–代数 X 中的任一元素, 则 a 生成的主理想为

$$(a] = \{0\} \cup \{x \in X \,|存在正整数 n, 使得 x * a^n = 0\}.$$

2.4.3 闭理想

已经知道, BCI–代数的理想未必是子代数, 但是是子代数的理想又是十分重要的.

定义 2.4.3 如果 I 既是 BCI 代数 X 的理想, 又是 X 的子代数, 则称 I 为 X 的闭理想.

例如, 在例 2.4.2 中, $I = \{0, 2\}$ 就是闭理想.

定理 2.4.6 BCI–代数 X 的 BCK-部分

$$\mathrm{KP}(X) = \{x \in X \,|0 * x = 0\}$$

是 X 的闭理想.

证明 首先, $\forall x, y \in \mathrm{KP}(X)$, 即 $0 * x = 0 * y = 0$, 则由式 (2.1.13) 知

$$0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y) = 0 * 0 = 0,$$

故 $x * y \in \mathrm{KP}(x)$, 即说明 $\mathrm{KP}(X)$ 是 X 的子代数.

其次, 显然, $0 \in \mathrm{KP}(x)$. 设 $y * x \in \mathrm{KP}(x)$, $x \in \mathrm{KP}(x)$, 即

$$0 * (y * x) = 0, \quad 0 * x = 0,$$

则

$$0 * y = (0 * y) * 0 = (0 * y) * (0 * x) = 0 * (y * x) = 0,$$

故 $y \in \mathrm{KP}(x)$, 从而 $\mathrm{KP}(X)$ 是 X 的理想, 故 $\mathrm{KP}(X)$ 必是闭理想. 证毕

定理 2.4.7 设 I 是 X 的理想, 则 I 是闭理想 $\Leftrightarrow \forall x \in I$ 有 $0 * x \in I$.

证明 $\Rightarrow$ 由于 I 是 X 的闭理想, $x \in I$, $0 \in I$, 故 $0 * x \in I$.

$\Leftarrow$ $\forall x, y \in I$, 由式 (2.1.9) 知

$$(x * y) * x = (x * x) * y = 0 * y \in I.$$

但 $x \in I$, I 是 X 的理想, 故 $x * y \in I$, 从而 I 是 X 的子代数, 必是 X 的闭理想. 证毕

定理 2.4.8 设 I 是 BCI–代数 X 含 0 的非空子集, I 是 X 的闭理想当且仅当 $\forall x, y, z \in X$, 由 $x * z, y * z, z \in I$ 可以推出 $x * y \in I$.

证明　如果 I 是闭理想, 由于 $x*z, y*z, z \in I$ 且 I 为理想, 则必有 $x, y \in I$, 但 I 是子代数, 故 $x*y \in I$.

反过来, $\forall x, y \in X$, 设 $x*y, y \in I$, 由于

$$0*0=0\in I, \quad y*0=y\in I,$$

由已知得 $0*y \in I$. 再由 $x*y, 0*y, y \in I$ 得 $x = x*0 \in I$, 从而 I 是 X 的理想. 又由于已经证明 $0*y \in I$, 则由定理 2.4.7 知, I 是闭理想.　　证毕

定理 2.4.9　设 I 是 BCI–代数 X 中的理想, 如果 I 包含了 X 的有限个极小元, 则 I 是闭理想.

证明　设 $\forall a \in I$, 令 $a_n = 0*(0*a)^n$, 则由式 (2.1.14) 和 (2.1.15) 得

$$a_n * a^n = (0*(0*a^n))*a^n = (0*a^n)*(0*a^n) = 0 \in I.$$

由于 $a \in I$, 所以 $a_n \in I (n = 1, 2, \cdots)$.

又由定理 2.1.6 可知, a_n 必为 X 的极小元, 但 I 中只含有限个极小元, 所以 I 中的元素序列

$$a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_n, \quad \cdots$$

中必有重复元素, 不妨取 $a_k = a_{k+l}$ $(l > 0)$, 则 $a_k = a_k * (0*a)^l$, 从而有

$$\begin{aligned} a_l &= 0*(0*a)^l = 0*(0*a^l) = (a_k*a_k)*(0*a^l) \\ &= (a_k*(0*a^l))*a_k = a_{k+l}*a_k = 0, \end{aligned}$$

即

$$a_{l-1}*(0*a) = a_l = 0,$$

从而 $a_{l-1} \leqslant 0*a$. 但由定理 2.1.6 知, $0*a$ 为极小元, 故 $a_{l-1} = 0*a$, 但前面已证得对每个 $n, a_n \in I$, 从而 $a_{l-1} = 0*a \in I$. 由定理 2.4.7 知, I 是闭理想.　　证毕

定理 2.4.10　BCI–代数 X 的闭理想的理想必是 X 的理想, 闭理想的闭理想必是 X 的闭理想.

证明　设 I 是 X 的闭理想. 则 $(I, *, 0)$ 是 BCI–代数. 设 J 是 I 的理想, $\forall x, y \in X$, 设 $y*x \in J$, $x \in J$. 由于 $J \subseteq I$, 故 $y*x \in I$, $x \in I$. 由于 I 是理想, 故 $y \in I$, J 又是 I 的理想, 故 $y \in J$, 从而 J 是 X 的理想.　　证毕

推论 2.4.2　BCI–代数 X 的 BCK 部分中的每个理想都是 X 的理想.

证明　由定理 2.4.6 知, KP(X) 是 X 的闭理想. 再由定理 2.4.10 即可得证.

定理 2.4.11　设 k 为任意正整数, X 是 BCI–代数, 则

$$T_k(X) = \left\{ x \in X \,\middle|\, 0*x^k = 0 \right\}$$

必是 X 的闭理想.

证明 显然有 $0 \in T_k(X)$.

$\forall x, y \in T_k(X)$, 即 $0 * x^k = 0 * y^k = 0$, 故

$$0 * (x * y)^k = (0 * x^k) * (0 * y^k) = 0 * 0 = 0,$$

即得 $x * y \in T_k(X)$, 从而 $T_k(X)$ 是 X 的子代数.

设 $x * y \in T_k(X)$, $y \in T_k(X)$, 即 $0 * (x * y)^k = 0 * y^k = 0$, 由式 (2.1.16) 得

$$0 * x^k = (0 * x^k) * (0 * y^k) = 0 * (x * y)^k = 0,$$

故 $x \in T_k(X)$, 从而 $T_k(X)$ 是 X 的闭理想. 证毕

在 2.3 节中, 把每个元素都是诣零元的 BCI–代数叫诣零的. 下面用闭理想刻画诣零 BCI–代数.

定理 2.4.12 BCI–代数 X 是诣零的当且仅当 X 的每个理想都是闭理想.

证明 设 X 是诣零的, I 是 X 的任一理想, $\forall x \in I$, 由于 x 是诣零元, 即存在正整数 k, 使得 $0 * x^k = 0$. 如果 $k = 1$, 则 $0 * x = 0 \in I$; 如果 $k > 1$, 则

$$(0 * x) * x^{k-1} = 0 * x^k = 0 \in I.$$

由于 I 为理想, $x \in I$, 于是由定理 2.4.3 知, $0 * x \in I$. 再由定理 2.4.7 知, I 是闭理想.

反过来, 设 X 中的每个理想都是闭理想, $\forall x \in X$, $(x]$ 为 x 生成的主理想, 故 $0 * x \in (x]$. 如果 $0 * x = 0$, 则 x 显然为诣零元; 如果 $0 * x \neq 0$, 则由推论 2.4.1 知, 存在正整数 k, 使得 $(0 * x) * x^k = 0$, 即 $0 * x^{k+1} = 0$, 从而 x 为诣零元, 故 X 是诣零的.
证毕

2.4.4 滤子

已经知道, 在偏序集中, 理想与滤子是互相对偶的概念. BCI 代数也是偏序集, 因此, 下面也来建立 BCI–代数中的滤子的概念, 并讨论它的性质.

定义 2.4.4 设 X 是 BCI–代数, F 是 X 的非空子集, 如果

(1) $0 \in F$;

(2) $\forall x, y \in X$, 由 $x * y \in F$, $x \in F$ 可以推出 $y \in F$,

则称 F 为 X 的滤子.

定义 2.4.5 设 A 是 BCI–代数 X 的非空子集, 把包含 A 的全部滤子之交叫做 A 生成的滤子, 记为 $[A)$. 特别地, 把 $\{a\}$ 生成的滤子叫做 a 生成的主滤子, 记为 $[a)$.

显然, X 是 X 的滤子, 特别是在 BCK–代数 X 中, 只有 X 是 X 的滤子.

例 2.4.4 设 $X = \{0, 1, a\}$,

*	0	1	a
0	0	0	a
1	1	0	a
a	a	a	0

显然, $I=\{0,1\}$ 既是 X 的理想也是滤子.

在例 2.4.1 中, $\mathbf{Z}^*$ 是理想但不是滤子.

定理 2.4.13　设 F 是 BCI 代数 X 的滤子, $\forall x\in F$ 且 $x\leqslant y$, 则 $y\in F$.

证明　由 $x\leqslant y$ 得 $x*y=0\in F$ 且 $x\in F$, 故 $y\in F$.　　证毕

定理 2.4.13 说明, BCI–代数 $(X,*,0)$ 的滤子必是它的自然偏序集 $(X,\leqslant)$ 的滤子. 这也是称之为滤子的原因.

由于 $\{0\}$ 是 X 的平凡理想, 自然要考虑 $\{0\}$ 是否为任意 BCI–代数的滤子.

事实上, 在非零 BCK–代数 X 中, 由于对任意 $x\in X$, $0*x=0$, 从而 $\{0\}$ 不可能是 X 的滤子.

定理 2.4.14　$\{0\}$ 是 BCI–代数 X 的滤子当且仅当 $\mathrm{KP}(X)=\{0\}$.

证明　如果 $\{0\}$ 是 X 的滤子, 则 $\forall x\in \mathrm{KP}(X)$, 即 $0*x=0\in\{0\}$, 故 $x\in\{0\}$. 即 $x=0$, 从而 $\mathrm{KP}(X)=\{0\}$.

反之, 设 $0*x\in\{0\}$, 即 $0*x=0$, 于是有 $x\in\mathrm{KP}(X)$, 故 $x=0$, 从而 $\{0\}$ 为 X 的滤子.　　证毕

定理 2.4.14 表明, 讨论 BCK–代数中的零滤子没有多大的意义.

定理 2.4.15　设 F 是 BCI–代数 X 的非空子集, F 是 X 的滤子 $\Leftrightarrow$ 对 F 中的任意有限个元素 $b_1,b_2,\cdots,b_n$, 由 $b_1*(b_2*(\cdots(b_n*x)\cdots))\in F$ 可以推出 $x\in F$.

证明　设 F 是 X 的滤子, $\forall b_1,b_2,\cdots,b_n\in F$, 设

$$b_1*(b_2*(\cdots*(b_n*x)\cdots))\in F,$$

则由 $b_1\in F$ 得 $b_2*(\cdots*(b_n*x)\cdots)\in F$. 重复下去, 最终得到 $x\in F$.

反过来, 设 $b\in F, b*x\in F$, 则 $x\in F$, 故 F 是 X 的滤子.　　证毕

定理 2.4.16　设 $\{F_k\,|k\in K\}$ 是 BCI 代数 X 的一族滤子, 那么

(1) $\bigcap\limits_{k\in K}F_k$ 是 X 的滤子;

(2) 如果 $F_k(k\in K)$ 两两可比较, 则 $\bigcup\limits_{k\in K}F_k$ 也是 X 的滤子.

证明与定理 2.4.4 类似.

定理 2.4.17　BCI 代数 X 的 BCK 部分 $\mathrm{KP}(X)$ 是 X 的最小滤子.

证明　设 $x*y\in\mathrm{KP}(X)$, $x\in\mathrm{KP}(X)$, 即

$$0*(x*y)=0,\quad 0*x=0,$$

则

$$0*(0*y)=(0*x)*(0*y)=0*(x*y)=0,$$

于是

$$0*y=0*(0*(0*y))=0*0=0,$$

从而 $y\in \mathrm{KP}(X)$. 又显然, $0\in \mathrm{KP}(X)$, 故 $\mathrm{KP}(X)$ 是 X 的滤子.

设 F 是 X 的任意滤子, $\forall x\in \mathrm{KP}(X)$, $0*x=0\in F$, 故 $x\in F$, 于是 $\mathrm{KP}(x)\subseteq F$, 从而 $\mathrm{KP}(X)$ 是 X 中的最小滤子. 证毕

推论 2.4.3 BCI–代数 X 的所有滤子的交即为 X 的 BCK–部分.

定理 2.4.18 设 F 是 BCI–代数 X 的滤子, 如果 F 包含了 X 的极小元 x_0, 则 F 必包含 x_0 的分支 V_{x_0}.

证明 设 x_0 为 F 中的一个极小元, 则 $\forall x\in V_{x_0}$ 有 $x_0\leqslant x$, 从而 $x\in F$. 证毕

已经知道, I 既是 X 的理想又是子代数 (称为闭理想) 当且仅当 $\forall x,y,z\in X$, 由 $x*z,y*z,z\in I$ 可以推出 $x*y\in I$. 下面给出滤子相应的结论.

定理 2.4.19 设 X 是 BCI–代数, A 既是 X 的子代数又是滤子当且仅当由 $x,x*y,x*z\in A$ 可以推出 $y*z\in A$.

证明 如果 A 既是 X 的子代数又是滤子, 设 $x,x*y,x*z\in A$. 由于 A 是子代数, 故 $(x*z)*(x*y)\in A$. 由式 (2.1.1) 知

$$(x*z)*(x*y)\leqslant y*z,$$

并且 A 是滤子, 由定理 2.4.13 知 $y*z\in A$.

反过来, 首先, $\forall x\in A$, 由 $x,x*0,x*0\in A$ 可得 $0=0*0\in A$. 其次, 设 $x,x*y\in A$, 由于 $x*0=x\in A$, 故 $y=y*0\in A$, 从而 A 是滤子. 最后, $\forall x,y\in A$, 由于 $x*0=x\in A,x*x=0\in A$, 故 $0*x\in A$. 同理可得 $0*y\in A$. 又由于 $0\in A$, 故 $x*y\in A$, 从而 A 是 X 的子代数. 证毕

已经知道, BCI–代数 X 的理想 I 是子代数 $\Leftrightarrow \forall x\in I$ 有 $0*x\in I$. 下面给出滤子相应的结论.

定理 2.4.20 如果 A 是 X 的子代数, 则 A 是滤子当且仅当由 $0*x\in A$ 可以推出 $x\in A$.

证明 如果 A 是滤子, 则显然由 $0*x\in A$ 可推出 $x\in A$. 反过来, 设 $x\in A,x*y\in A$, 由于 A 是子代数, 故

$$0*y=(x*x)*y=(x*y)*x\in A,$$

从而 $y\in A$, 故 A 是滤子. 证毕

定理 2.4.21 设 f 是 $X\to\bar{X}$ 的 BCI–同态, 如果 $\bar{F}$ 是 X 的滤子, 则 $F=f^{-1}(\bar{F})$ 也是 X 的滤子.

证明　设 $\bar{F}$ 是 $\bar{X}$ 的滤子, 并设 $x, x*y \in F$, 则

$$f(x) \in \bar{F}, \quad f(x)\bar{*}f(y) = f(x*y) \in \bar{F},$$

则 $f(y) \in \bar{F}$, 从而 $y \in F$, 故 F 为 X 的滤子.　证毕

以上讨论表明, 定义 2.4.4 给出的 BCI–代数的滤子与定义 2.4.1 给出的理想, 不但定义上相互对应, 而且有许多性质相互对偶.

下面讨论滤子、理想、子代数的关系.

定理 2.4.22　如果 F 既是 X 的理想又是滤子, 则 F 必为子代数.

证明　$\forall x, y \in F$ 有 $x*(x*y) \leqslant y \in F$. 由于 F 为理想, 故 $x*(x*y) \in F$, 但 F 为滤子, 故 $x*y \in F$, 从而 F 是 X 的子代数.　证毕

定理 2.4.23　如果 F 既是 X 的子代数又是滤子, 则 F 必为理想.

证明　设 $x \in F, y*x \in F$, 又显然 $x*x = 0 \in F$, 并且 F 为子代数, 故有 $(x*x)*(y*x) \in F$. 但由式 (2.1.11) 知

$$(x*x)*(y*x) \leqslant x*y,$$

并且 F 是滤子, 故 $x*y \in F$. 由 F 为滤子知 $y \in F$, 从而 F 为 X 的理想.　证毕

定理 2.4.24　设 A 既是 BCI–代数 X 的理想又是滤子, L 表示 A 中的全体极小元的集合, V_x 是关于极小元 x 的分支, 则 $A = \bigcup\limits_{x\in L} V_x$.

证明　由定理 2.1.6 知, $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的全体极小元的集合, 故 $L = \mathrm{SP}(X) \cap A$. $\forall a \in A$, 设 $x = 0*(0*a)$, 则由定理 2.1.6 知 $x \in \mathrm{SP}(X)$. 又由式 (2.1.2) 知 $x \leqslant a$, 从而 $a \in V_x$. 由于 A 是理想, 故 $x \in A$, 即 $x \in \mathrm{SP}(X) \cap A = L$, 故 $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in L} V_x$.

反过来, $\forall b \in \bigcup\limits_{x\in L} V_x$, 则存在 $x \in L = \mathrm{SP}(X) \cap A$, 使得 $b \in V_x$, 从而 $x \leqslant b$. 由于 $x \in A$ 且 A 是滤子, 则由定理 2.4.13 知 $b \in A$, 从而 $\bigcup\limits_{x\in L} V_x \subseteq A$, 所以 $A = \bigcup\limits_{x\in L} V_x$.

证毕

2.5　商代数、同态和同构

2.5.1　积代数与商代数

设 $(X_i, *_i, 0_i)(i \in D)$ 是一族 BCI–代数, 设

$$X = \prod_{i\in D} X_i = \left\{ f : D \to \bigcup_{i\in D} X_i \,\middle|\, f(i) \in X_i, \forall i \in D \right\}.$$

规定

$$(f*g)(i) = f(i) *_i g(i), \quad \forall i \in D,$$

$$0(i) = 0_i, \quad \forall i \in D.$$

容易验证, $(X, *, 0)$ 也是 BCI–代数, 称之为 X_i 的积代数.

为了给出 BCI–代数的商代数, 首先讨论 BCI–代数 X 的理想能否产生一个等价关系.

设 I 是 BCI–代数 X 的理想, 规定

$$x \sim y \Leftrightarrow x * y, y * x \in I,$$

下面证明 "$\sim$" 为 X 上的等价关系.

$$\forall x \in I, \quad x * x = 0 \in I, \text{故} \quad x \sim x.$$

设 $x \sim y$, 即 $x * y, y * x \in I$, 显然有 $y \sim x$.

设 $x \sim y$, $y \sim z$, 即 $x * y, y * x, y * z, z * y \in I$, 则

$$(x * z) * (x * y) \leqslant y * z \in I.$$

由于 I 是理想且 $x * y$, $y * z \in I$, 故 $x * z \in I$. 同理可得 $z * x \in I$, 从而 $x \sim z$, 即 "$\sim$" 为 X 上的等价关系.

令

$$C_x = \{y \in X \,|y \sim x\}, \quad \forall x \in X,$$

由该等价关系决定的商集为

$$X/I = \{C_x \,|x \in X\}.$$

规定

$$C_x * C_y = C_{x*y}.$$

下面说明这个运算是良好的.

设 $C_x = C_u$, $C_y = C_v$, 即 $x \sim u$, $y \sim v$, 也即

$$x * u, \quad u * x, \quad y * v, \quad v * y \in I,$$

则

$$(x * y) * (x * v) \leqslant v * y \in I, \quad (x * v) * (x * y) \leqslant y * v \in I,$$

从而

$$(x * y) * (x * v), (x * v) * (x * y) \in I,$$

故 $x * y \sim x * v$. 同理得 $x * v \sim u * v$, 故 $x * y \sim u * v$, 即有

$$C_x * C_y = C_{x*y} = C_{u*v} = C_u * C_v.$$

以上讨论说明, 在商集 X/I 中, 按照公式 $C_x * C_y = C_{x*y}$ 定义了一个良好的二元运算. 进一步还有如下定理:

定理 2.5.1　设 I 是 BCI–代数 X 的理想, $\forall x \in X$, 令

$$C_x = \{y \in X \,|x * y \,, y * x \in I\},$$

$$X/I = \{C_x \,|x \in X\},$$

规定

$$C_x * C_y = C_{x*y}, \quad \forall x, y \in X,$$

则 $(X/I, *, C_0)$ 是 BCI–代数, 称之为 X 关于理想 I 的商代数, 简记为 X/I.

证明　前面已经证明了 "$*$" 是 X/I 上的二元运算. $\forall x, y, z \in X$ 有

$$((C_x * C_y) * (C_x * C_z)) * (C_z * C_y) = C_{((x*y)*(x*z))*(z*y)} = C_0,$$

$$C_x * C_0 = C_{x*0} = C_x.$$

设 $C_x * C_y = C_y * C_x = C_0$, 即 $C_{x*y} = C_{y*x} = C_0$, 则有 $x * y$, $y * x \in I$, 故 $C_x = C_y$, 从而 $(X/I, *, C_0)$ 是 BCI–代数.　　证毕

定理 2.5.2　如果 X 是 BCK–代数, 则 $(X/I, *, C_0)$ 也是 BCK–代数.

证明　由定理 2.5.1 知, $(X/I, *, C_0)$ 是 BCI–代数. 由于 $C_0 * C_x = C_{0*x} = C_0$, 故 $(X/I, *, C_0)$ 是 BCK–代数.　　证毕

定理 2.5.3　设 I 是 BCI–代数 X 的理想, 则 I 是闭理想当且仅当

$$C_0 = \{x \in X \,|x * 0, 0 * x \in I\} = I.$$

证明　如果 I 是闭理想, 由定理 2.4.7 知, 由 $x * 0 = x \in I$ 可以推出 $0 * x \in I$, 则 $C_0 = I$.

如果 $C_0 = I$, $\forall x \in I$, $0 * x \in c_0 = I$, 故 I 为闭理想.　　证毕

2.5.2　BCI–同态与同构

定义 2.5.1　设 $(X, *, 0)$, $(\bar{X}, \bar{*}, \bar{0})$ 都是 BCI–代数, f 是 $X \to \bar{X}$ 的映射. 如果 $\forall x, y \in X$ 有

$$f(x * y) = f(x) \bar{*} f(y),$$

则称 f 为 $X \to \bar{X}$ 的 BCI–同态. 如果 f 还是双射, 则称 f 为 $X \to \bar{X}$ 的 BCI–同构. 如果存在 $X \to \bar{X}$ 的 BCI–同态满射, 则称 X 与 $\bar{X}$ 为 BCI–同态, 记为 $X \sim \bar{X}$. 如果存在 $X \to \bar{X}$ 的 BCI–同构, 则称 X 与 $\bar{X}$ 为 BCI–同构, 记为 $X \cong \bar{X}$.

把 BCI–代数 X 到自身上的同态 (同构) 映射叫做 X 上的 BCI–自同态 (自同构).

定理 2.5.4 如果 f 为 $X \to \bar{X}$ 的 BCI–同态, 则

(1) $f(0) = \bar{0}$;

(2) $\ker f = \{x \in X \,|\, f(x) = \bar{0}\}$ 是 X 中的闭理想.

证明 (1) $\bar{0} = f(0)\bar{*}f(0) = f(0*0) = f(0)$, 即 $f(0) = \bar{0}$.

(2) 由于 $0 \in \ker f$, 故 $\ker f$ 是 X 的非空子集. 设 $x, y*x \in \ker f$, 则

$$f(y)*f(x) = f(y*x) = \bar{0}$$

且 $f(x) = \bar{0}$, 于是 $f(y) = \bar{0}$, 故 $y \in \ker f$, 从而 $\ker f$ 是 X 的理想. 又由于

$$f(0*x) = f(0)\bar{*}f(x) = \bar{0}\bar{*}\bar{0} = \bar{0},$$

故 $0*x \in \ker f$, 所以 $\ker f$ 为闭理想. 证毕

定理 2.5.5 BCI–同态为序同态.

证明 设 f 是 $X \to \bar{X}$ 的 BCI–同态, $x \leqslant y$, 即 $x*y = 0$, 则

$$f(x)\bar{*}f(y) = f(x*y) = f(0) = \bar{0},$$

故 $f(x) \leqslant f(y)$. 证毕

定理 2.5.6 设 f 是 $X \to \bar{X}$ 的 BCI–同态, 如果 $\bar{A}$ 是 $\bar{X}$ 的子代数 (理想、闭理想、滤子), 则 $A = f^{-1}(\bar{A})$ 也是 X 的子代数 (理想、闭理想、滤子).

证明 如果 $\bar{A}$ 是 $\bar{X}$ 的子代数, 则 $f(0) = \bar{0} \in \bar{A}$, 即 $0 \in A$. $\forall x, y \in A$, $f(x), f(y) \in \bar{A}$, $f(x*y) = f(x)\bar{*}f(y) \in \bar{A}$, 从而 $x*y \in A$, 即 A 为 X 的子代数.

如果 $\bar{A}$ 为 X 的理想, $f(0) = 0 \in \bar{A}$, 从而 $0 \in A$. 设 $x, y*x \in A$, 则 $f(x) \in \bar{A}$, $f(y*x) = f(y)*f(x) \in \bar{A}$, 但 $\bar{A}$ 为理想, 故 $f(y) \in \bar{A}$, 从而 $y \in A$, 故 A 为 X 的理想.

如果 $\bar{A}$ 为闭理想, 则由前面的证明可知, A 为 X 的理想和子代数, 从而 A 为闭理想.

设 $\bar{A}$ 是 $\bar{X}$ 的滤子, 并设 $x, x*y \in A$, 则

$$f(x) \in \bar{A}, \quad f(x)\bar{*}f(y) = f(x*y) \in \bar{A},$$

则 $f(y) \in \bar{A}$, 从而 $y \in A$, 故 A 为 X 的滤子. 证毕

定理 2.5.7 设 f 是 $X \to \bar{X}$ 的 BCI–同态满射, 如果 A 是 X 的子代数 (理想、闭理想), 则 $f(A)$ 也是 $\bar{X}$ 的子代数 (理想、闭理想).

证明 如果 A 是 X 的子代数, 由于 $0 \in A$, 故 $\bar{0} = f(0) \in f(A)$. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in f(A)$, 存在 $x, y \in A$, 使得 $\bar{x} = f(x)$, $\bar{y} = f(y)$. 由于 A 为 X 的子代数, 故 $x*y \in A$, 故

$$\bar{x}\bar{*}\bar{y} = f(x)\bar{*}f(y) = f(x*y) \in f(A),$$

从而 $f(A)$ 为 $\bar{X}$ 的子代数.

如果 A 是 X 的理想, 由于 $0 \in A$, 故 $\bar{0} = f(0) \in f(A)$.

设 $\bar{x}, \bar{y}\bar{*}\bar{x} \in f(A)$, 则存在 $x, z \in A$, $y \in X$, 使得

$$\bar{x} = f(x), \quad \bar{y}\bar{*}\bar{x} = f(z), \quad \bar{y} = f(y),$$

故得

$$f(z) = f(y)\bar{*}f(x) = f(y * x),$$

则

$$f((y * x) * z) = f(y * x)\bar{*}f(z) = \bar{0},$$

$$\bar{y} = f(y)\bar{*}\bar{0} = f(y)\bar{*}f((y * x) * z) = f(y * ((y * x) * z)).$$

令 $u = y * ((y * x) * z)$, 则

$$(u * x) * z = ((y * x) * ((y * x) * z)) * z = 0 \in A,$$

并且由 $x, z \in A$ 得 $u \in A$, 故 $\bar{y} = f(u) \in f(A)$, 从而 $f(A)$ 为 $\bar{X}$ 的理想.

如果 A 是闭理想, 则 $f(A)$ 既是 $\bar{X}$ 的理想, 也是子代数, 故 $f(A)$ 为闭理想. 证毕

定理 2.5.8　设 I 是 X 的理想, 则 $X \sim X/I$, 其中 BCI–同态满射为

$$\pi : X \sim X/I, \quad x \to C_x,$$

π 叫做正则 BCI–同态.

证明　$\forall x, y \in X$ 有

$$\pi(x) = C_x, \quad \pi_y = C_y, \quad \pi(x * y) = C_{x*y} = C_x * C_y = \pi(x) * \pi(y),$$

故 π 为 BCI–同态满射.　　　　证毕

定理 2.5.9　设 f 是 BCI–代数 X 到 $\bar{X}$ 的 BCI–同态满射, $K = \ker f$, 则 $X/K \cong \bar{X}$.

证明　令

$$\varphi : X/K \to \bar{X}, \quad C_x \to f(x).$$

首先, 如果 $C_x = C_y$, 则 $x^*y, y^*x \in K$, 从而有

$$f(x) * f(y) = f(y) * f(x) = \bar{0},$$

故 $f(x) = f(y)$, 即 φ 为 $X/K \to \bar{X}$ 的映射.

其次, 如果 $f(x)=f(y)$, 则 $f(x*y)=f(y*x)=0$, 从而有

$$x*y, y*x \in K,$$

故 $C_x=C_y$, 即 φ 为单射.

再次, $\forall \bar{x} \in \bar{X}$, 由于 f 为满射, 则存在 $x \in X$, 使得 $\bar{x}=f(x)$, 则 $C_x \xrightarrow{\varphi} \bar{x}$, 故 φ 为满射.

最后, 设 $C_x \to f(x)$, $C_y \to f(y)$, 则有

$$C_x * C_y = C_{x*y} \to f(x*y)=f(x)*f(y),$$

故 φ 为 BCI–同构映射, 从而 $X/K \cong \bar{X}$. 证毕

第 3 章　BCI–代数与半群

传统的代数系统群、半群、环和半环的基本特点是代数运算适合结合律, 而 BCK-代数和 BCI–代数是从逻辑运算出发建立起来的代数系统, 并没有把适合结合律当成基本要求. 事实上, 适合结合律的 BCK-代数只有零代数. 那么, 它们与传统的群和半群之间有联系吗? 如果有联系, 如何建立 BCI–代数与结合代数的关系? 从 BCI–代数的发展来看, 主要有以下几种方法: 第一, 在 BCI-代数中寻找一些特殊类, 如 1980 年由胡庆平和 K. Iséki 引入的结合 BCI–代数, 1983 年由雷天德引入的广义结合 BCI–代数和 1990 年由惠昌常引入的拟结合 BCI–代数, 由这些特殊的 BCI-代数类可直接得到群和半群. 第二, 杨闻起从一般 BCI–代数的 “*” 运算出发派生出一种适合结合律的新运算, 从而由一般的 BCI–代数得到半群. 第三, 1995 年, 黄文平借助于变换群的思想, 在一般的 BCI–代数上寻找一些变换, 让它们关于变换的合成作成半群. 第四, 1993 年, 韩国数学家田英培等通过在 BCI–代数上再添加一个半群结构而形成 BCI–半群, 并说明它是环概念的一般化. 本章通过讨论前三个问题来反映 BCI-代数与群和半群的关系, 第 4 个问题将在第 4、第 5 章作专门讨论.

3.1　结合 BCI–代数与对合群

1980 年, 胡庆平与 K. Iséki 引入了结合 BCI 代数. 从此, 人们开始研究 BCI-代数与群和半群的关系.

3.1.1　概念与例子

定义 3.1.1　设 $(X,*,0)$ 是 BCI–代数, 如果 $\forall x,y,z\in X$, 有

$$(x*y)*z=x*(y*z)\,, \tag{3.1.1}$$

则称 X 为结合 BCI–代数.

例 3.1.1　设 $X=\{0,1\}$, 运算 “*” 规定如下:

*	0	1
0	0	1
1	1	0

则 $(X,*,0)$ 是结合 BCI–代数.

例 3.1.2　设 G 是以 e 为单位元的对合群, 令 $a*b=a\cdot b$, 则 $(G,*,e)$ 是结合 BCI–代数.

例 3.1.3 设 $X=\{0,1,a\}$, 运算 "$*$" 规定如下:

$*$	0	1	a
0	0	0	a
1	1	0	a
a	a	a	0

则 $(X,*,0)$ 是 BCI–代数. 由于 $(1*a)*a=0$, $1*(a*a)=1$, 故 X 不是结合的.

3.1.2 基本性质

先给出结合 BCI–代数的等价条件.

定理 3.1.1 设 $(X,*,0)$ 是 BCI–代数, 则以下命题等价:

(1) X 是结合的;

(2) $\forall x\in X$ 有 $0*x=x$; (3.1.2)

(3) $\forall x,y\in X$ 有 $x*y=y*x$; (3.1.3)

(4) $\forall x,y\in X$ 有 $(y*x)*x=y$; (3.1.4)

(5) $\forall x,y,z\in X$ 有 $x*(y*z)=y*(x*z)$; (3.1.5)

(6) $\forall x,y\in X$ 有 $x*(y*x)=y$. (3.1.6)

证明 (1) $\Rightarrow$(2) $(0*x)*x=0*(x*x)=0*0=0$,

$$x*(0*x)=(x*0)*x=x*x=0,$$

故 $0*x=x$.

(2)$\Rightarrow$(3) $(x*y)*(y*x)=((0*x)*(0*y))*(y*x)=0$.

x,y 互换得

$$(y*x)*(x*y)=0,$$

故得 $x*y=y*x$.

(3)$\Rightarrow$(1) $x*(y*z)=(y*z)*x=(y*x)*z=(x*y)*z$.

因此, (1), (2), (3) 两两等价.

(1)$\Rightarrow$(4) $(y*x)*x=y*(x*x)=y*0=y$.

(4)$\Rightarrow$(2) $0*x=(x*x)*x=x$.

(1)$\Rightarrow$(5) $x*(y*z)=(x*y)*z=(x*z)*y=y*(x*z)$.

(5)$\Rightarrow$(6) $x*(y*x)=y*(x*x)=y*0=y$.

(6)$\Rightarrow$(2) $0*x=0*(x*0)=x$.

因此, (1)~(6) 相互等价. 证毕

结合 BCI–代数中元素的阶的特点如下:

定理 3.1.2 BCI–代数 $(X,*,0)$ 是结合的当且仅当 X 中非零元的阶为 2.

证明　如果 X 是结合的, 设 $x \neq 0$, 则由式 (3.1.2) 知 $0 * x = x$, 则 $0 * x^2 = 0$, 于是 $|x| = 2$.

反过来, $\forall a \neq 0, |a| = 2$, 则 $\forall x \in X$, $(0 * x) * x = 0$, 由于

$$\begin{aligned} 0 * (x * (0 * x)) &= (0 * x) * (0 * (0 * x)) \\ &= (0 * (0 * (0 * x))) * x = (0 * x) * x = 0, \end{aligned}$$

故 $|x * (0 * x)| = 1$, 但由式 (3.1.6) 得 $x * (0 * x) = 0$, 故 $0 * x = x$, 由定理 3.1.1 知, X 是结合的.　证毕

定理 3.1.3　结合 BCI–代数 X 的 BCK 部分 $\mathrm{KP}(X) = 0$.

证明　$\mathrm{KP}(X) = \{x \in X \,|\, 0 * x = 0\}$. 由式 (3.1.2) 知 $0 * x = x$. 如果 $x \in \mathrm{KP}(X)$, 则 $x = 0$, 故 $\mathrm{KP}(X) = 0$.　证毕

定理 3.1.3 的逆命题不成立, 反例如下:

例 3.1.4　设 $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, X 上的运算 “$*$” 如下:

$*$	0	1	2	3	4
0	0	4	3	2	1
1	1	0	4	3	2
2	2	1	0	4	3
3	3	2	1	0	4
4	4	3	2	1	0

容易验证, $(X, *, 0)$ 是 BCI–代数, $\mathrm{KP}(X) = 0$, 但由于 $0 * 1 = 4 \neq 1$, 故 X 不是结合的.

定理 3.1.3 还说明, 结合 BCK–代数只有零代数. 因此, 只有真 BCI–代数研究其结合性才有意义.

定理 3.1.4　在结合 BCI–代数 X 中, 理想、滤子和子代数等价, 从而结合 BCI–代数必为诣零的.

证明　由式 (3.1.3) 知, 理想和滤子显然等价. 下面证明理想与子代数等价.

设 I 是 X 的任一理想, $\forall x, y \in I$, 由式 (3.1.4) 得

$$(x * y) * y = x \in I,$$

但 I 为理想, 并且 $y \in I$, 故 $x * y \in I$, 从而 I 为 X 的子代数.

设 Y 是 X 的子代数, 设 $x * y \in Y, y \in Y$, 则

$$x = (x * y) * y \in Y,$$

从而 Y 是 X 的理想.　证毕

定理 3.1.5　结合 BCI–代数的子代数、理想、滤子、积代数, 商代数和同态象也是结合的.

证明 设 Y 是 X 的子代数, $\forall y \in Y$, 则 $y \in X$. 由于 X 是结合的, 故 $0 * y = y$. 由定理 3.1.1 知, Y 也是结合的.

由定理 3.1.4 知, X 的理想. 滤子也是结合的.

设 I 是 X 的理想, 其商代数为

$$X/I = \{C_x \,|x \in X\}.$$

$\forall x \in X$ 有 $0 * x = x$, 于是有

$$C_0 * C_x = C_{0*x} = C_x,$$

从而 X/I 也是结合的. 证毕

3.1.3 结合 BCI–代数与对合群

下面讨论结合 BCI–代数与对合群的关系.

定理 3.1.6 结合 BCI 代数 X 是以 0 为单位元的对合群. 反过来, 任意对合群是以单位元 e 为零元的结合 BCI 代数.

证明 设 $(X, *, 0)$ 是结合 BCI–代数, $\forall x \in X$ 有 $0 * x = x * 0 = x$ 且 $x * x = 0$, 故 X 关于运算 “$*$” 是以 0 为单位元的对合群.

反过来, 设 $(G, \cdot)$ 是对合群, 由例 3.1.2 知, $(G, \cdot, e)$ 是以 e 为零元的结合 BCI 代数. 证毕

定理 3.1.7 I 是结合 BCI–代数 X 的理想当且仅当 I 是对合群 X 的正规子群, 并且结合 BCI–代数 X 关于理想 I 的商代数, 即为对合群 X 关于正规子群 I 的商群.

证明 如果 I 是结合 BCI–代数 X 的理想, 则由定理 3.1.5 知, I 必是 X 的子代数, 从而 $\forall x, y \in I$ 有 $x * y \in I$. 又由定理 3.1.6 知, $(X, *)$ 是以 0 为单位元的对合群, 并且 $x^{-1} = x \in I$, 故 I 是 X 的子群. 但由定理 1.2.3 知, X 是交换的, 故 I 是对合群 X 的正规子群.

反过来, 如果 I 是对合群 X 的正规子群, 设 $x * a \in I$, $a \in I$, 则

$$x = x * (a * a) = (x * a) * a \in I,$$

故 I 是 BCI–代数 X 的理想.

设 BCI–代数 X 关于理想 I 的商代数为

$$A = \{C_x \,|x \in I\}.$$

再设对合群 X 关于正规子群 I 的商群为

$$B = \{x * I \,|x \in I\}.$$

$\forall C_x \in A$, $\forall y \in C_x$ 有 $x * y, y * x \in I$. 由于 $x^{-1} = x$, 故 $x^{-1} * y \in I$, 于是 $y \in x * I$, 即 $C_x \subseteq x * I$.

反过来, $\forall y \in x * I$ 有 $x * y = x^{-1} * y \in I$, 从而 $x * y = y * x \in I$, 故 $y \in C_x$, 从而 $C_x = x * I$, 于是 $A = B$. 证毕

定理 3.1.8 结合 BCI–代数 X 中元素 x 的阶与对合群 X 中元素 x 的阶相同.

证明 由于 $0 * x = x$, 故

$$0 * x^n = (\cdots((0 * x) * x) * \cdots) * x = x * x * \cdots * x = x^n,$$

于是

$$0 * x^n = 0 \Leftrightarrow x^n = 0,$$

从而 x 在 BCI–代数 X 中的阶等价于 x 在对合群 X 中的阶. 证毕

3.1.4 BCI–代数的结合部分

1996 年, 罗敏霞引入了 BCI–代数的结合部分, 并讨论了它成为理想的条件.

定义 3.1.2 设 $(X, *, 0)$ 是 BCI–代数, 将

$$\mathrm{AP}(X) = \{x \in X \,|0 * x = x\}$$

叫做 X 的结合部分.

在例 3.1.3 中, $\mathrm{AP}(X) = \{0, a\}$.

显然, X 是结合的 $\Leftrightarrow \mathrm{AP}(X) = X$, 从而 $\mathrm{AP}(X)$ 可用来衡量 BCI–代数 X 具有结合性的程度, 即 $\mathrm{AP}(X)$ 越大, X 越接近于结合 BCI–代数.

另外, 显然, $\mathrm{AP}(X) \cap \mathrm{KP}(X) = 0$, 从而 BCK–代数的结合部分为 0.

定理 3.1.9 BCI–代数 X 的结合部分 $\mathrm{AP}(X)$ 是 X 中最大的结合子代数, 从而 $\mathrm{AP}(X)$ 关于 $*$ 是以 0 为单位元的对合群.

证明 由于 $0 * 0 = 0$, 故 $0 \in \mathrm{AP}(X)$. $\forall x, y \in \mathrm{AP}(X)$, 则

$$0 * x = x, \quad 0 * y = y,$$

故

$$0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y) = x * y,$$

从而 $x * y \in \mathrm{AP}(X)$, 即 $\mathrm{AP}(X)$ 是 X 的子代数, 显然, $\mathrm{AP}(X)$ 是结合的.

设 Y 是 X 中的任一结合子代数, $\forall y \in Y$, 由定理 3.1.1 知 $0 * y = y$, 从而 $y \in \mathrm{AP}(X)$, 即 $Y \subseteq \mathrm{AP}(X)$. 再由定理 3.1.6 知, $(\mathrm{AP}(X), *)$ 是以 0 为单位元的对合群. 证毕

但是要注意: $\mathrm{AP}(X)$ 未必是 X 的理想. 例如, 在例 3.1.3 中, $\mathrm{AP}(X) = \{0, a\}$ 为 X 的子代数, 但由于 $1 * a = a \in \mathrm{AP}(x)$, $1 \notin \mathrm{AP}(X)$, 故 $\mathrm{AP}(X)$ 不是 X 的理想. 下面给出 $\mathrm{AP}(X)$ 成为理想的条件.

定理 3.1.10 $\mathrm{AP}(X)$ 是 X 的理想 $\Leftrightarrow \forall x, y \in X$, $\forall a \in \mathrm{AP}(X)$, 由 $x * a = y * a$ 可推出 $x = y$.

证明 $\Leftarrow$ 设 $x * a \in \mathrm{AP}(X)$, $a \in \mathrm{AP}(X)$, 即

$$0*(x*a)=x*a,\quad 0*a=a,$$

故得

$$(0*x)*a=x*a,$$

从而 $0*x=x$, 即 $x\in \mathrm{AP}(X)$, 从而 $\mathrm{AP}(X)$ 是 X 的理想.

$\Rightarrow$ 设 $\mathrm{AP}(X)$ 是 X 的理想, $\forall a\in \mathrm{AP}(X)$, 即 $0*a=a, \forall x,y\in X$, 设 $x*a=y*a$, 则

$$\begin{aligned}(x*y)*a=&(x*a)*y=(y*a)*y\\=&(y*y)*a=0*a=a\in \mathrm{AP}(X),\end{aligned}$$

并且 $\mathrm{AP}(X)$ 是 X 的理想, 故 $x*y\in \mathrm{AP}(X)$, 即 $0*(x*y)=x*y$.

由于 $\mathrm{AP}(X)$ 是结合子代数, 由式 (3.1.3) 得

$$a*(x*y)=(x*y)*a=a,$$

取 $a=0$ 得 $0*(x*y)=0$, 从而 $x*y=0$, 交换 x,y 得 $y*x=0$, 故 $x=y$. 证毕

定理 3.1.11 设 $(X_i,*_i,0_i)(i\in D)$ 是一族 BCI–代数, $(X,*,0)$ 是它们的积代数, $\mathrm{AP}(X_i)$ 是 X_i 的结合部分, 则

$$\mathrm{AP}(X)=\prod_{i\in D}\mathrm{AP}(X_i)$$

是 $(X,*,0)$ 的结合部分.

证明 任取 $f\in \mathrm{AP}(X)$, 则 $0*f=f$, 则 $\forall i\in D$ 有

$$0_i *_i f(i)=f(i),$$

从而 $f(i)\in \mathrm{AP}(X_i)$, 进而 $f\in \prod\limits_{i\in D}\mathrm{AP}(X_i)$, 即得

$$\mathrm{AP}(X)\subseteq\prod_{i\in D}\mathrm{AP}(X_i).$$

反过来, $\forall f\in\prod\limits_{i\in D}\mathrm{AP}(X_i)$, 则 $f(i)\in \mathrm{AP}(X_i), \forall i\in D$, 即 $0_i *_i f(i)=f(i)$, 故 $0*f=f$, 于是 $f\in \mathrm{AP}(X)$, 故

$$\prod_{i\in D}\mathrm{AP}(X_i)\subseteq \mathrm{AP}(X),$$

所以

$$\mathrm{AP}(X)=\prod_{i\in D}\mathrm{AP}(X_i).$$

证毕

3.2 广义结合 BCI–代数与交换群

1983 年, 雷天德引入了广义结合 BCI–代数, 后来又以等价的方式称之为 p–半单代数, 这是一类十分重要的 BCI–代数. 因为, 一方面, 它与 BCK–代数形成 BCI–代数的两个极端; 另一方面, 它与交换群有紧密的联系. 本节给出广义结合 BCI–代数的概念和基本性质, 特别是讨论它与交换群的关系.

3.2.1 概念

在 3.1 节已经知道, 结合 BCI–代数 X 中有一个重要公式 $0*x=x$, 从而有

$$0*(0*x)=x.$$

定义 3.2.1　设 $(X,*,0)$ 是 BCI–代数, 如果 $\forall x\in X$ 有

$$0*(0*x)=x, \tag{3.2.1}$$

则称 X 为广义结合 BCI–代数 (p–半单 BCI–代数).

显然, 广义结合 BCI–代数是结合 BCI–代数的推广, 也存在非结合的广义结合 BCI–代数的例子.

例 3.2.1　设 $X=\{0.1.2.3.4\}$, 运算 “$*$” 规定为

$*$	0	1	2	3	4
0	0	4	3	2	1
1	1	0	4	3	2
2	2	1	0	4	3
3	3	2	1	0	4
4	4	3	2	1	0

容易验证, $(X,*,0)$ 是广义结合 BCI–代数, 但由于 $0*1=4\neq 1$, 故 X 不是结合的.

例 3.2.2　设 $X=\{0,a,b\}$, 运算 “$*$” 规定为

$*$	0	a	b
0	0	0	b
a	a	0	b
b	b	b	0

容易验证, $(X,*,0)$ 是 BCI–代数, 但由于 $0*(0*a)=0\neq a$, 故 X 不是广义结合的.

3.2.2 基本性质

定理 3.2.1　设 $(X,*,0)$ 是 BCI-代数, 则 X 是广义结合的当且仅当 X 的 BCK-部分 $\mathrm{KP}(X)=0$.

证明　$\Rightarrow$　$\forall x\in \mathrm{KP}(X)$ 有 $0*x=0$, 从而

$$x=0*(0*x)=0*0=0,$$

故 $\mathrm{KP}(X)=0$.

$\Leftarrow$　$\forall x\in X$, 令 $y=0*(0*x)$, 则

$$y*x=(0*(0*x))*x=(0*x)*(0*x)=0,$$

$$\begin{aligned}0*(x*y)=&0*(x*(0*(0*x)))\\=&(0*x)*(0*(0*(0*x)))\\=&(0*x)*(0*x)=0,\end{aligned}$$

故 $x*y\in \mathrm{KP}(X)=0$, 但 $\mathrm{KP}(X)=0$, 故 $x*y=0$, 从而 $x=y=0*(0*x)$, 所以 X 是广义结合的. 证毕

定理 3.2.1 说明, 非零 BCK–代数不是广义结合的, 即既是广义结合又是 BCK–代数只能为 0, 从而广义结合 BCI–代数与 BCK–代数是两个极端情况.

由定理 2.1.6 知, x 是极小元 $\Leftrightarrow 0*(0*x)=x$, 故有如下定理:

定理 3.2.2 BCI–代数 X 是广义结合的 $\Leftrightarrow$ X 的每个元素都是极小元.

下面给出广义结合 BCI–代数的基本公式.

定理 3.2.3 在 BCI–代数 X 中, $\forall x,y,z,a\in X$, 则以下命题等价:

(1) X 是广义结合的;

(2) $x*(0*y)=y*(0*x)$; (3.2.2)

(3) $0*(x*y)=y*x$; (3.2.3)

(4) $x*(y*z)=z*(y*x)$; (3.2.4)

(5) $x*(x*y)=y$; (3.2.5)

(6) $(z*x)*(z*y)=y*x$; (3.2.6)

(7) $(x*z)*(y*z)=x*y$; (3.2.7)

(8) $a*x=a*y\Rightarrow x=y$; (3.2.8)

(9) $x*a=y*a\Rightarrow x=y$. (3.2.9)

证明 (1)⇒(2) 由于 $0*(0*x)=x$, $0*(0*y)=y$, 则有

$$x*(0*y)=(0*(0*x))*(0*y)=(0*(0*y))*(0*x)=y*(0*x).$$

(2)⇒(3)
$$\begin{aligned}0*(x*y)&=(0*x)*(0*y)=y*(0*(0*x))\\&=y*(x*(0*0))=y*x.\end{aligned}$$

(3)⇒(1) 取 $x=0$ 得 $0*(0*y)=y*0=y$.

因此, (1), (2), (3) 互相等价.

(3)⇒(4)
$$\begin{aligned}x*(y*z)&=x*(0*(z*y))=(z*y)*(0*x)\\&=(z*(0*x))*y=(x*(0*z))*y=(x*y)*(0*z)\\&=z*(0*(x*y))=z*(y*x).\end{aligned}$$

(4)⇒(5) 取 $y=x$ 得 $x*(x*z)=z*(x*x)=z*0=z$.

(5)⇒(6)
$$\begin{aligned}(y*x)*((z*x)*(z*y))&=(y*x)*((z*(z*y))*x)\\&=(y*x)*(y*x)=0.\end{aligned}$$

又由于 $((z*x)*(z*y))*(y*x)=0$, 故 $(z*x)*(z*y)=y*x$.

(6)⇒(1)　取 $z=x=0$ 得

$$0*(0*y)=(0*0)*(0*y)=y*0=y.$$

因此, (1)~(6) 互相等价.

(1)⇒(7)　由式 (2.1.11) 得 $(x*z)*(y*z)\leqslant x*y$. 由式 (2.1.8) 得

$$u=(x*y)*((x*z)*(y*z))\geqslant(x*y)*(x*y)=0,$$

故 $u\in\mathrm{KP}(X)$. 又由定理 3.2.1 知 $\mathrm{KP}(X)=0$, 即得

$$u=(x*y)*((x*z)*(y*z))=0,$$

从而 $x*y=(x*z)*(y*z)$.

(7)⇒(3)　取 $x=z$ 得 $(x*x)*(y*x)=x*y$, 即 $0*(y*x)=x*y$.

(8)⇒(1)　由于 $0*(0*(0*x))=0*x$, 则由左消去律得

$$0*(0*x)=x.$$

(1)⇒(8)　设 $a*x=a*y$, 则

$$0=(a*x)*(a*y)\leqslant y*x,$$

故 $y*x\in\mathrm{KP}(X)=0$, 从而 $y*x=0$. x,y 互换得 $x*y=0$, 从而 $x=y$.

(1)⇒(9)　设 $x*a=y*a$, 则

$$0=(x*a)*(y*a)\leqslant x*y,$$

故 $x*y\in\mathrm{KP}(X)=0$, 即 $x*y=0$. x,y 互换得 $y*x=0$, 故 $x=y$.

(9)⇒(1)　$(0*(0*x))*x=0=x*x$, 由右消去律得

$$0*(0*x)=x,$$

故 X 是广义结合的.　　证毕

定理 3.2.4　BCI–代数 X 是广义结合的当且仅当每个非 0 元的阶都大于 1.

证明　⇐　$\forall x\in X$, 由于

$$0*(x*(0*(0*x)))=(0*x)*(0*x)=0,$$

则 $|x*(0*(0*x))|\leqslant 1$. 由已知得

$$x*(0*(0*x))=0,$$

但显然

$$(0*(0*x))*x=0,$$

故

$$0*(0*x)=x,$$

从而 X 是广义结合的.

$\Rightarrow$ 设 X 是广义结合的且 $|x|=1$, 即 $0*x=0$, 从而 $x\in \mathrm{KP}(X)=0$, 故 $x=0$, 从而当 $x\neq 0$ 时有 $|x|>1$. 证毕

定理 3.2.5 在广义结合 BCI–代数 X 中, 子代数与滤子等价, 并且它们都是理想.

证明 设 Y 是 X 的子代数, 设 $y, y*x\in Y$, 则由式 (3.2.5) 知

$$x=y*(y*x)\in Y,$$

故 Y 是 X 的滤子.

设 $y, x*y\in Y$, 则 $0*y\in Y$, 由式 (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5) 得

$$x=y*(y*x)=y*(0*(x*y))=(x*y)*(0*y)\in Y,$$

从而 Y 是 X 的理想.

设 F 是 X 的滤子, $\forall x, y\in F$ 有

$$x*(x*y)=y\in F.$$

由于 F 为滤子, 故 $x*y\in F$, 从而 F 是 X 的子代数. 证毕

定理 3.2.6 广义结合 BCI–代数的子代数、积、商和同态象都是广义结合的.

证明与定理 3.1.5 类似.

3.2.3 广义结合 BCI–代数的伴随群

定理 3.2.7 任意交换群 $(G,+)$ 关于减法运算作成以 0 为零元的广义结合 BCI 代数, 称之为交换群 G 的伴随 BCI–代数.

证明 由例 2.1.3 知, $(G,-,\cdot)$ 是 BCI 代数, 并且由于

$$0-(0-x)=0,$$

故它是广义结合 BCI–代数. 证毕

定理 3.2.8 设 $(X,*,0)$ 是广义结合 BCI 代数, $\forall x, y\in X$, 规定 $x+y=x*(0*y)$, 则 $(X,+)$ 是以 0 为零元的交换群, 并且 $0*x$ 为 x 的负元, 称之为 BCI–代数 X 的伴随群.

证明 $\forall x, y, z\in X$, 由定理 3.2.3 得

$$x+y=x*(0*y)=y*(0*x)=y+x,$$

$$\begin{aligned}(x+y)+z&=(y+x)+z\\&=(y*(0*x))*(0*z)=(y*(0*z))*(0*x)\\&=(y+z)+x=x+(y+z),\end{aligned}$$

$$0+x=0*(0*x)=x,$$

$$(0*x)+x=(0*x)*(0*x)=0,$$

故 $(X,+)$ 是交换群, 0 为零元, $0*x$ 为 x 的负元. 证毕

定理 3.2.9 一个交换群的伴随 BCI–代数的伴随群为 G 自身, 一个广义结合 BCI 代数 X 的伴随群的伴随 BCI–代数也为 X 自身.

证明 设交换群 $(G,+)$ 以 0 为零元, 其伴随 BCI–代数为 $(G,-,0)$, $(G,-,0)$ 的伴随群的运算为

$$x-(0-y)=x+y,$$

故 $(G,-.0)$ 的伴随群为 $(G,+)$.

设 $(X,*,0)$ 为广义结合的 BCI–代数, 其伴随群中的运算为

$$x+y=x*(0*y),$$

并且群 $(X,+)$ 的伴随 BCI–代数中的运算为

$$x-y=x+(-y)=x+0*y=x*(0*(0*y))=x*y,$$

故群 $(X,+)$ 的伴随 BCI–代数即为 $(X,*,0)$. 证毕

定理 3.2.10 设广义结合 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的伴随群为 $(X,+)$, $A\subseteq X$, 则 A 是 BCI-代数 $(X,*,0)$ 的子代数 $\Leftrightarrow$ A 是伴随群 $(X,+)$ 的子群.

证明 $\Rightarrow$ $\forall x,y\in A$, $0=x*x\in A$, 故 $-y=0*y\in A$, 并且有

$$x+y=x*(0*y)\in A,$$

故 A 是 $(X,+)$ 的子群.

$\Leftarrow$ 设 A 是 $(X,+)$ 的子群, 显然, $0\in A.\forall x,y\in A$, 则有 $x-y\in A$, 从而

$$x*y=x*(0*(0*y))=x-y\in A,$$

所以 A 是 $(X,*,0)$ 的子代数. 证毕

由定理 3.2.5 知, 广义结合 BCI–代数的子代数都是理想, 而交换群中的子群都是正规子群, 从而由定理 3.2.10 得到如下定理:

定理 3.2.11 设广义结合 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的伴随群为 $(X,+)$, 如果 A 是伴随群 $(X,+)$ 的正规子群, 则 A 必是 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的理想, 并且伴随群 $(X,+)$ 关于正规子群 A 的商群即为 BCI-代数 $(X,*,0)$ 关于 A 的商代数的伴随群.

证明 设群 $(X,+)$ 关于 A 的商群为

$$\alpha=\{x+A\,|x\in X\},$$

BCI–代数 $(X,*,0)$ 关于 A 的商代数为

$$\beta=\{C_x\,|x\in X\}.$$

首先, 证明 $\alpha=\beta$. $\forall C_x\in\beta$, $\forall y\in C_x$, 则 $y*x, x*y\in A$, 从而

$$x-y=x*(0*(0*y))=x*y\in A,$$

故 $y\in x+A$, 即得 $C_x\subseteq x+A$. 反过来, $\forall z\in x+A$, 即 $x-z\in A$, $z-x\in A$, 即 $x*z, z*x\in A$, 故 $z\in C_x$, 从而 $x+A\subseteq C_x$, 于是得到 $C_x=x+A$. 由 x 的任意性知 $\alpha=\beta$.

其次, 证明 α 中的加法是 β 的伴随群的加法. 设商代数 β 的伴随群中的运算为 $\oplus$, $\forall C_x, C_y\in\beta$ 有

$$\begin{aligned}C_x\oplus C_y=&C_x*(C_0*C_y)=C_{x*(0*y)}=C_{x+y}=(x+y)+A\\=&(x+A)+(y+A),\end{aligned}$$

即

$$(x+A)\oplus(y+A)=(x+A)+(y+A),$$

从而 α 是 β 的伴随群. 证毕

定理 3.2.12 设广义结合 BCI-代数 $(X,*,0)$ 的伴随群为 $(X,+)$, $\forall x\in X$, 则 x 在 BCI–代数中的阶与 x 在伴随群中的阶相等.

证明

$$\begin{aligned}nx=&\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n次}\\=&(\cdots((x*(0*x))*(0*x))*\cdots)*(0*x)\\=&(0*(0*x))*(0*x)^{n-1}\\=&0*(0*x)^n=0*(0*x^n).\end{aligned}$$

如果 $0*x^n=0$, 则 $nx=0*(0*x^n)=0*0=0$.

如果 $nx=0$, 即 $0*(0*x^n)=0$, 则

$$0*x^n=0*(0*(0*x^n))=0,$$

故 $0*x^n=0$ 当且仅当 $nx=0$, 从而 x 在群 $(X,+)$ 中的阶与 x 在 BCI–代数 $(X,*,0)$ 中的阶相等. 证毕

3.2.4 BCI–代数的广义结合部分 (p–半单部分)

定义 3.2.2 设 $(X,*,0)$ 是 BCI–代数, 将

$$\mathrm{SP}(X)=\{x\in X\,|0*(0*x)=x\}$$

叫做 X 的广义结合部分 (p–半单部分).

显然, BCI–代数 X 是广义结合的当且仅当 $\mathrm{SP}(X)=X$, 从而 $\mathrm{SP}(X)$ 可用来衡量 X 接近广义结合的程度, 即 $\mathrm{SP}(X)$ 越大, 则 X 越接近广义结合 BCI–代数.

定理 3.2.13 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的极小元的集合, 从而

$$\mathrm{SP}(X)=\{0*x\,|x\in X\}.$$

证明 由定理 2.1.6 得, x 为极小元 $\Leftrightarrow 0*(0*x)=x$, 故 $\mathrm{SP}(x)$ 即为 X 的极小元之集.

$\forall x\in\mathrm{SP}(X), x=0*(0*x)$, 取 $a=0*x$, 即得 $x=0*a$. 反过来, $\forall x\in X$, 由于

$$0*(0*(0*x))=0*x,$$

故 $0*x\in\mathrm{SP}(X)$, 从而有

$$\mathrm{SP}(X)=\{0*x\,|x\in X\}.$$

证毕

定理 3.2.14 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的广义结合子代数.

证明 $\forall x,y\in\mathrm{SP}(X)$ 有 $0*(0*x)=x$, $0*(0*y)=y$, 故

$$0*(0*(x*y))=(0*(0*x))*(0*(0*y))=x*y,$$

即 $x*y\in\mathrm{SP}(X)$, 从而 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的子代数, 进而 $(\mathrm{SP}(X),*,0)$ 是广义结合子代数.

证毕

定理 3.2.15 BCI–代数 X 的广义结合部分 $\mathrm{SP}(X)$ 关于以下加法:

$$x+y=x*(0*y)$$

是一个以 0 为零元的交换群.

证明 由定理 3.2.14 知, $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的子代数, 并且 $\forall x\in\mathrm{SP}(X)$, $x=0*(0*x)$, 故 $(\mathrm{SP}(X),*,0)$ 是广义结合 BCI–代数. 由定理 3.2.8 知, $(\mathrm{SP}(X),+)$ 是以 0 为零元的交换群.

证毕

定理 3.2.16 BCI–代数 X 是广义结合的当且仅当 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的滤子.

证明 如果 X 是广义结合的, 则 $\mathrm{SP}(X)=X$. 显然, X 是 X 的滤子. 反过来, 如果 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的滤子, 则 $\forall x\in X$, 由定理 2.1.6 知 $0*x\in\mathrm{SP}(X)$. 又显然 $0\in\mathrm{SP}(X)$, 故 $x\in\mathrm{SP}(X)$, 从而 $\mathrm{SP}(X)=X$, 即 X 是广义结合的.

证毕

定理 3.2.17 $\mathrm{SP}(X)\cap\mathrm{KP}(X)=0$, $\mathrm{AP}(X)\subseteq\mathrm{SP}(X)$.

证明 $\forall x\in\mathrm{SP}(X)\cap\mathrm{KP}(X)$ 有 $0*(0*x)=x$, 并且 $0*x=0$, 故 $x=0$, 即得

$$\mathrm{SP}(X)\cap\mathrm{KP}(X)=0.$$

$\forall x\in\mathrm{AP}(X)$, $0*x=x$, 故

$$0*(0*x)=0*x=x,$$

即 $x\in\mathrm{SP}(X)$, 从而 $P(X)\subseteq\mathrm{SP}(X)$.

证毕

定理 3.2.18 设 $(X_i, *_i, 0_i)(i \in D)$ 是一族 BCI–代数, $(X, *, 0)$ 是它们的积代数, $\mathrm{SP}(X_i)$ 是 X_i 的广义结合部分, 则

$$\mathrm{SP}(X) = \prod_{i \in D} \mathrm{SP}(X_i)$$

是 $(X, *, 0)$ 的广义结合部分.

证明与定理 3.1.11 类似.

3.3 拟结合 BCI–代数与交换半群

1990 年, 惠昌常从另一角度把结合 BCI–代数推广为拟结合 BCI–代数. 1996 年, 刘用麟又引入了它的加法序半群, 并给出了它的性质.

3.3.1 概念与基本性质

定义 3.3.1 设 $(X, *, 0)$ 是 BCI–代数, 如果 $\forall x, y, z \in X$ 有

$$(x * y) * z \leqslant x * (y * z), \tag{3.3.1}$$

则称 $(X, *, 0)$ 为拟结合 BCI–代数.

显然, 结合 BCI–代数必是拟结合的, 也存在着非结合的拟结合 BCI–代数.

例 3.3.1 设 $X = \{0, a, b\}$, 规定运算 "$*$" 如下:

$*$	0	a	b
0	0	0	b
a	a	0	b
b	b	b	0

容易验证, 它是拟结合的, 但不是结合的.

定理 3.3.1 设 X 是 BCI–代数, $\forall x, y, z \in X$, 则以下命题等价:

(1) X 是拟结合的;

(2) $0 * (0 * x) = 0 * x$; (3.3.2)

(3) $0 * (x * y) = 0 * (y * x)$; (3.3.3)

(4) $(0 * x) * y = 0 * (x * y)$. (3.3.4)

证明 (1)⇒(2) 由于 $0 * (0 * x) \geqslant (0 * 0) * x = 0 * x$, 由式 (2.1.8), (2.1.12) 得

$$0 * (0 * x) \leqslant 0 * (0 * (0 * x)) = 0 * x,$$

故 $0 * (0 * x) = 0 * x$.

(2)⇒(3)
$$\begin{aligned} 0 * (x * y) &= (0 * x) * (0 * y) = (0 * (0 * x)) * (0 * y) \\ &= (0 * (0 * y)) * (0 * x) = (0 * y) * (0 * x) \\ &= 0 * (y * x). \end{aligned}$$

(3)⇒(4)　$0*(x*y)=0*(y*x)=(0*y)*(0*x)$

$$=(0*(0*x))*y$$

$$=(0*(x*0))*y=(0*x)*y.$$

(4)⇒(1)　$((x*y)*z)*(x*(y*z))$

$$=((x*(x*(y*z)))*y)*z$$

$$\leqslant((y*z)*y)*z=((y*y)*z)*z$$

$$=(0*z)*z=0*(z*z)=0*0=0,$$

故 $(x*y)*z\leqslant x*(y*z)$.　证毕

定理 3.3.2　BCI–代数 X 是拟结合的 $\Leftrightarrow \forall x\in X$ 有 $|x|\leqslant 2$.

证明　$\Rightarrow$　$\forall x\in X$, $(0*x)*x=0*(x*x)=0*0=0$, 故 $|x|\leqslant 2$.

$\Leftarrow$　$\forall x,y,z\in X$, 由于 $|z|\leqslant 2$, 故 $(0*z)*z=0$. 由式 (2.1.9) 得

$$((y*z)*y)*z=((y*y)*z)*z=0*z^2=0.$$

再由式 (2.1.11) 得

$$(x*y)*z=((x*y)*z)*(((y*z)*y)*z)$$
$$\leqslant(x*y)*((y*z)*y)\leqslant x*(y*z),$$

故 X 是拟结合的.　证毕

定理 3.3.3　BCI–代数 X 是拟结合的当且仅当 $\mathrm{SP}(X)$ 为结合子代数.

证明　$\Rightarrow$　由于 X 是拟结合的, $\forall x\in \mathrm{SP}(X)$ 有 $0*(0*x)=x$, 但 $0*(0*x)=0*x$, 故 $0*x=x$. 由定理 3.1.1 知, $\mathrm{SP}(X)$ 为结合子代数.

$\Leftarrow$　$\forall x\in X$, 由定理 3.2.13 知 $0*x\in \mathrm{SP}(X)$, 但 $\mathrm{SP}(X)$ 为结合的, 故

$$0*(0*x)=0*x.$$

由定理 3.3.1 知, X 是拟结合的.　证毕

定理 3.3.4　BCI–代数 X 是拟结合的 $\Leftrightarrow X/\mathrm{KP}(X)$ 为拟结合的.

证明　$\Rightarrow$　$X/\mathrm{KP}(X)=\{C_x\,|\,x\in X\}$.

$\forall x\in X$, 由于 X 是拟结合的, 故 $0*(0*x)=0*x$, 于是有

$$C_0*(C_0*C_x)=C_{0*(0*x)}=C_{0*x}=C_0*C_x,$$

故 $X/\mathrm{KP}(X)$ 为拟结合的.

$\Leftarrow$　$\forall x\in X, C_0*(C_0*C_x)=C_0*C_x$, 即 $C_{0*(0*x)}=C_{0*x}$, 故有

$$(0*(0*x))*(0*x),(0*x)*(0*(0*x))\in \mathrm{KP}(X),$$

即

$$0*((0*(0*x))*(0*x))=0*((0*x)*(0*(0*x)))=0,$$

从而

$$(0*x)*(0*(0*x)) = (0*(0*x))*(0*x) = 0,$$

故 $0*(0*x) = 0*x$, 即 X 是拟结合的. 证毕

定理 3.3.5 BCK–代数和结合 BCI–代数都是拟结合的.

证明 设 X 是 BCK–代数, $\forall x \in X$ 有 $0*x=0$, 从而

$$0*(0*x) = 0*0 = 0 = 0*x,$$

故 X 是拟结合的.

设 X 是结合 BCI–代数, $\forall x \in X$ 有 $0*x=x$, 从而

$$0*(0*x) = 0*x,$$

故 X 是拟结合的. 证毕

定理 3.3.6 BCI–代数 X 是结合的当且仅当 X 既是拟结合的又是广义结合的.

证明 如果 X 是结合的, 则由定理 3.3.5 知, X 是拟结合的. 显然, X 是广义结合的.

设 X 既是拟结合又是广义结合的, 即 $\forall x \in X$ 有

$$0*(0*x) = 0*x, \quad 0*(0*x) = x,$$

从而 $0*x=x$, 故 X 是结合的. 证毕

定理 3.3.7 设 BCI–代数 X 是拟结合的, 则

(1) $\mathrm{SP}(X)$ 必是 X 的闭理想;

(2) $X/\mathrm{SP}(X)$ 是 BCK–代数.

证明 (1) 定理 3.2.14 已经说明, $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的子代数, 下面证明 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的理想. 设 $x, y*x \in \mathrm{SP}(X)$, 由定理 3.3.3 知, $\mathrm{SP}(X)$ 为结合子代数, 故

$$y = y*(x*x) = (y*x)*x \in \mathrm{SP}(X),$$

故 $\mathrm{SP}(X)$ 为 X 的理想, 从而必是闭理想.

(2) 由于 $\mathrm{SP}(X)$ 是闭理想, 故由定理 2.5.3 知 $C_0 = \mathrm{SP}(X)$. $\forall x \in X$, 由于 $0*x \in \mathrm{SP}(X) = C_0$, 故有

$$C_0 * C_x = C_{0*x} = C_0,$$

故 $X/\mathrm{SP}(X)$ 为 BCK–代数. 证毕

定理 3.3.8 拟结合 BCI–代数的子代数、积代数、商代数和同态象都是拟结合的.

证明与定理 3.1.5 类似.

3.3.2 拟结合 BCI–代数的交换序半群

定理 3.3.9　设 $(X,*,0)$ 是拟结合 BCI–代数, 规定

$$x+y=0*(x*y)\,,$$

则 $(X,+)$ 是交换序半群.

证明　首先, $\forall x,y\in X$, 根据式 (3.3.3) 知

$$x+y=0*(x*y)=0*(y*x)=y+x,$$

从而有

$$\begin{aligned}(x+y)+z=&(y+x)+z=0*((0*(y*x))*z)\\=&0*(((0*y)*x)*z)=0*(((0*y)*z)*x)\\=&0*((0*(y*z))*x)=(y+z)+x\\=&x+(y+z)\,,\end{aligned}$$

故 $(X,+)$ 是交换半群. 设 $x\leqslant y$, 则 $z*y\leqslant z*x$, 于是

$$0*(z*x)\leqslant 0*(z*y),$$

从而有 $z+x\leqslant z+y$ 且 $x+z\leqslant y+z$, 故 $(X,+)$ 是交换序半群.　证毕

定义 3.3.2　设 X 是拟结合 BCI–代数, 把定理 3.3.9 中的 $(X,+)$ 叫做 X 的交换序半群.

定理 3.3.10　拟结合 BCI–代数 X 的子代数的交换序半群是 X 的交换序半群的子半群.

证明　设 Y 是 X 的子代数, 则 $0\in Y$. $\forall x,y\in Y$, $x+y=0*(x*y)\in Y$, 故 $(Y,+)$ 是 $(X,+)$ 的子半群.　证毕

定理 3.3.11　拟结合 BCI–代数 X 的理想必是其交换序半群 $(x,+)$ 的子半群.

证明　设 I 是 $(X,*,0)$ 的理想, $\forall x,y\in I$, 由式 (3.3.4) 得

$$(0*y)*y=0*(y*y)=0\in I,$$

故 $0*y\in I$, 从而有

$$\begin{aligned}(x+y)*x=&(0*(x*y))*x=0*((x*y)*x)\\=&0*((x*x)*y)=0*(0*y)=0*y\in I.\end{aligned}$$

由于 I 是 $(X,*,0)$ 的理想, 故 $x+y\in I$, 从而 I 是 $(X,+)$ 的子半群.　证毕

定理 3.3.12　设 $(X,*,0)$ 是拟结合 BCI–代数, 则以下命题等价:

(1) $(X,*,0)$ 是广义结合的;

(2) $(X,*,0)$ 是结合的;

(3) 交换序半群 $(X,+)$ 是以 0 为幺元的幺半群;

(4) 交换序半群 $(X,+)$ 是以 0 为幺元的群.

证明 (1)⇒(2) 由定理 3.3.6 得出.

(2)⇒(3) 由定理 3.3.9 知, $(X,+)$ 是交换半群. $\forall x\in X$ 有

$$0+x=0*(0*x)=x,$$

故 0 为 $(X,+)$ 的幺元.

(3)⇒(4) $\forall x\in X$ 有

$$\begin{aligned}(0*x)+x=&0*((0*x)*x)=(0*(0*x))*(0*x)\\=&(0*x)*(0*x)=0,\end{aligned}$$

故 $-x=0*x$, 从而 $(X,+)$ 是群.

(4)⇒(1) $0*(0*x)=0+x=x$, 故 $(X,*,0)$ 是广义结合的. 证毕

3.3.3 拟结合部分

定义 3.3.3 设 $(X,*,0)$ 是任意 BCI–代数, 将

$$\mathrm{QP}(X)=\{x\in X\,|0*(0*x)\ =0*x\}$$

叫做 X 的拟结合部分.

例 3.3.2 设 $X=\{0,a,b,c\}$, 运算 “$*$” 规定为

$*$	0	a	b	c
0	0	c	0	a
a	a	0	a	c
b	b	c	0	a
c	c	0	c	a

可以验证, $(X,*,0)$ 是 BCI–代数, 并且

$$\mathrm{QP}(X)=\{0,b\}\,,\quad \mathrm{SP}(X)=\{0,a,c\}\,,\quad \mathrm{AP}(X)=0.$$

显然, $\mathrm{QP}(X)$ 的大小可以刻画 X 是否接近拟结合 BCI–代数, 并且由定理 3.3.5 知 $\mathrm{KP}(X)$, $\mathrm{AP}(X)\subseteq\mathrm{QP}(X)$.

定理 3.3.13 $\mathrm{QP}(X)$ 是 $(X,*,0)$ 中的最大拟结合子代数.

证明 $\forall x,y\in\mathrm{QP}(X)$ 有

$$0*(0*x)=0*x,\quad 0*(0*y)=0*y,$$

故

$$\begin{aligned}0*(0*(x*y)) &= (0*(0*x))*(0*(0*y)) \\ &= (0*x)*(0*y) = 0*(x*y),\end{aligned}$$

从而 $x*y \in \mathrm{QP}(X)$, 并且显然 $0 \in \mathrm{QP}(X)$, 故 $\mathrm{QP}(X)$ 是 X 的子代数, 它显然是拟结合的.

设 Y 是 X 中的任一拟结合子代数, $\forall y \in Y$, 则必有

$$0*(0*y) = 0*y,$$

即 $y \in \mathrm{QP}(X)$, 从而 $Y \subseteq \mathrm{QP}(X)$. 证毕

定理 3.3.14　$\mathrm{QP}(X)$ 是 BCI–代数 X 的闭理想.

证明　由定理 3.3.13 知, $\mathrm{QP}(X)$ 是 X 的子代数, 下面证明它是 X 的理想.

设 $x \in \mathrm{QP}(X)$, $y*x \in \mathrm{QP}(X)$, 由于 $\mathrm{QP}(X)$ 是拟结合子代数, 故由定理 3.3.2 知 $|x|, |y*x| \leqslant 2$, 即

$$(0*x)*x = 0, \quad (0*(y*x))*(y*x) = 0.$$

又由于

$$\begin{aligned}(0*(y*x))*(y*x) &= ((0*y)*(0*x))*(y*x) \\ &= ((0*(0*x))*y)*(y*x) = ((0*x)*(y*x))*y \\ &= ((0*(y*x))*x)*y = (((0*y)*(0*x))*x)*y \\ &= (((0*(0*x))*y)*x)*y = (((0*(0*x))*x)*y)*y \\ &= (0*y)*y,\end{aligned}$$

故 $(0*y)*y = 0$, 从而有

$$0*(0*y) = ((0*y)*y)*(0*y) = ((0*y)*(0*y))*y = 0*y,$$

即 $y \in \mathrm{QP}(X)$, 故 $\mathrm{QP}(X)$ 是 X 的理想. 证毕

定理 3.3.15　$\mathrm{QP}(X) \cap \mathrm{SP}(X) = \mathrm{AP}(X)$.

证明　显然, $\mathrm{AP}(X) \subseteq \mathrm{QP}(X)$, $\mathrm{AP}(X) \subseteq \mathrm{SP}(X)$, 故

$$\mathrm{AP}(X) \subseteq \mathrm{QP}(X) \cap \mathrm{SP}(X).$$

$\forall x = \mathrm{QP}(X) \cap \mathrm{SP}(X)$, 则

$$0*(0*x) = 0*x, 0*(0*x) = x,$$

故 $0*x = x$, 即 $x \in \mathrm{AP}(X)$, 从而

$$\mathrm{QP}(X) \cap \mathrm{SP}(X) = \mathrm{AP}(X).$$

证毕

定理 3.3.16 设 $\{(X_i, *_i, 0_i) | i \in D\}$ 是一族 BCI–代数, $(X, *, 0)$ 是它们的积代数, $\mathrm{QP}(X_i)$ 是 X_i 的拟结合部分, 则

$$\mathrm{QP}(X) = \prod_{i \in D} \mathrm{QP}(X_i)$$

是 $(X, *, 0)$ 的拟结合部分.

证明与定理 3.1.11 类似.

3.4 一般 BCI–代数的加法序半群

本节通过引入一般 BCI–代数的加法和加法序半群的概念, 讨论它们的性质, 并用它们分别刻画结合、广义结合、拟结合和诣零 BCI–代数, 以反映一般 BCI–代数与半群的紧密联系.

3.4.1 一般 BCI–代数与加法序半群

在广义结合 BCI–代数中, 令

$$x + y = x * (0 * y),$$

则 $(X, +)$ 是以 0 为零元的交换群.

在拟结合 BCI–代数 X 中, 令

$$x + y = 0 * (x * y),$$

则 $(X, +)$ 是加法序半群.

在一般 BCI–代数中, 能否给出一个加法, 将以上广义结合 BCI–代数中的加法和拟结合 BCI–代数中的加法统一起来, 并使 X 关于统一后的加法作成加法半群?

定义 3.4.1 在 BCI–代数 X 中, 将运算

$$x + y = 0 * ((0 * x) * y)$$

叫做 X 上的加法.

在结合 BCI–代数中, 由于 $0 * x = x$, 所以定义 3.4.1 中的加法可化简为

$$x + y = x * y,$$

这与 3.1 节中关于结合 BCI–代数的对合群中的运算一致.

在广义结合 BCI–代数 X 中, 由于 $0 * (0 * x) = x$, 所以定义 3.4.1 中的加法可化简为

$$x + y = x * (0 * y),$$

与 3.2 节中关于广义结合 BCI–代数的伴随群中的加法一致.

在拟结合 BCI–代数中, 由于 $0 * (0 * x) = 0 * x$, 所以定义 3.4.1 中的加法可化简为

$$x+y=0*(x*y),$$

这与 3.3 节中拟结合 BCI-代数的加法一致.

因此, 定义 3.4.1 统一了结合、广义结合与拟结合 BCI 代数中的加法. 不仅如此, 以上加法还有以下公式:

定理 3.4.1 在一般 BCI–代数 X 中, $\forall x,y,z\in X$ 有

(1) 交换律: $x+y=y+x$;

(2) 里外律: $(x+y)+z=(x+z)+y$, $x+(y+z)=y+(x+z)$;

(3) 结合律: $(x+y)+z=x+(y+z)$;

(4) 保序律: $x\leqslant y\Rightarrow z+x\leqslant z+y, x+z\leqslant y+z$.

证明 (1) $x+y=0*((0*x)*y)=0*((0*y)*x)=y+x$.

(2) 由定义 3.4.1 和式 (2.1.12) 得

$$\begin{aligned}(x+y)+z=&0*((0*(0*((0*x)*y)))*z)\\=&(0*((0*x)*y))*(0*z)=0*(((0*x)*y)*z).\end{aligned}$$

y,z 互换得

$$(x+z)+y=0*(((0*x)*z)*y)=0*(((0*x)*y)*z),$$

所以

$$(x+y)+z=(x+z)+y.$$

再由 (1) 可得

$$x+(y+z)=y+(x+z).$$

(3) 由 (1) 和 (2) 得

$$(x+y)+z=(y+x)+z=(y+z)+x=x+(y+z).$$

(4) 由于 $x\leqslant y$, 所以 $0*y\leqslant 0*x$, 从而 $(0*y)*z\leqslant(0*x)*z$, 从而

$$0*((0*x)*z)\leqslant 0*((0*y)*z),$$

即 $x+z\leqslant y+z$. 又由 (1) 得 $z+x\leqslant z+y$. 证毕

定理 3.4.1 说明 X 关于以上运算 “+” 和偏序 “$\leqslant$” 是一个交换序半群.

定义 3.4.2 设 $(X,*,0)$ 是 BCI–代数, 把 X 关于运算

$$x+y=0*((0*x)*y)$$

作成的加法序半群叫做 X 的加法序半群, 记为 $(X,+,\leqslant)$.

由前面的讨论可见, 结合 BCI–代数 X 的加法序半群是对合群, 广义结合 BCI–代数 X 的加法序半群就是 X 的伴随群, 拟结合 BCI–代数 X 的加法序半群就是 3.3 节中的半群 $(X,+)$.

定理 3.4.2 BCI–代数 X 中的加法运算有以下公式:

(1) $0+(x+y)=x+y$;

(2) $(0*x)+x=x+0*x=0$;

(3) $0+x\leqslant x$, 并且 $0+x=x$ 当且仅当 x 是关于 "$\leqslant$" 的极小元.

证明 (1) $0+(x+y)=0*((0*0)*(x+y))=0*(0*(0*((0*x)*y)))$

$$=0*((0*x)*y)=x+y.$$

(2) $(0*x)+x=x+(0*x)=0*((0*x)*(0*x))=0$.

(3) $0+x=0*((0*0)*x)=0*(0*x)\leqslant x$.

如果 x 为极小元, 则必有 $0+x=x$. 反过来, 如果 $0+x=x$, 即 $x=0*(0*x)$. 由定理 2.1.6 知, x 为极小元. 证毕

定理 3.4.3 设 X 是 BCI–代数, 则

(1) X 的结合部分 $\mathrm{AP}(X)$ 是加法序半群 $(X,+,\leqslant)$ 的对合子群;

(2) X 的广义结合部分 $\mathrm{SP}(X)$ 是加法序半群 $(X,+,\leqslant)$ 中的最大子群;

(3) X 的拟结合部分 $\mathrm{QP}(X)$ 是加法序半群 $(X,+,\leqslant)$ 中的交换子半群.

证明 (1) 由于 $\mathrm{AP}(X)$ 是 X 的子代数, 所以 $(\mathrm{AP}(X),*,0)$ 必是结合 BCI–代数, 其中的加法为 $x+y=x*y$, 由定理 3.1.9 知, $(\mathrm{AP}(X),+)$ 是对合群, 从而是 $(X,+,\leqslant)$ 中的对合子群.

(2) 由于 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的子代数, 则 $(\mathrm{SP}(X),*,0)$ 必是广义结合 BCI-代数, 其中的加法为

$$x+y=0*((0*x)*y)=(0*(0*x))*(0*y)=x*(0*y).$$

由定理 3.2.15 知, $(\mathrm{SP}(X),+)$ 是交换群, 从而是 $(X,+,\leqslant)$ 的交换子群.

设 S 是加法序半群中的任意子群, 则 $0\in S$ 且 0 是 S 中的零元. $\forall s\in S$, 由 $0+s=s$, 即 $0*(0*s)=s$, 于是 $s\in\mathrm{SP}(X)$, 即说明 $S\subseteq\mathrm{SP}(X)$, 从而 $\mathrm{SP}(X)$ 是 $(X,+,\leqslant)$ 中的最大子群.

(3) 由定理 3.3.13 知, $(\mathrm{QP}(X),*,0)$ 是拟结合 BCI–代数, 其上的加法为

$$\begin{aligned}x+y&=0*((0*x)*y)=(0*(0*x))*(0*y)\\&=(0*x)*(0*y)=0*(x*y).\end{aligned}$$

由定理 3.3.9 知, $(\mathrm{QP}(X),+)$ 是交换序半群, 从而也是 $(X,+,\leqslant)$ 的交换子半群. 证毕

定义 3.4.3 在 X 的加法序半群 $(X,+,\leqslant)$ 中, 记

$$kx=\begin{cases}x+0, & k=1,\\ \underbrace{x+x+\cdots+x}_{k\text{次}}, & k>1.\end{cases}$$

将满足 $mx=0$ 的最小正整数 m 叫做 x 在加法序半群 $(X,+,\leqslant)$ 中的阶, 记为 $|x|_+$. 如果对任意正整数 k, $kx\neq 0$, 则称 x 的阶为无穷大, 记为 $|x|_+=\infty$.

定理 3.4.4 在 BCI–代数 X 中, 有

(1) $kx=0*(0*x^k)=0*(0*x)^k$;

(2) $|x|_+=|x|$.

证明 (1) 当 $k=1$ 时,

$$1x=x+0=0*((0*x)*0)=0*(0*x).$$

当 $k=2$ 时,

$$2x=x+x=0*((0*x)*x)=0*(0*x^2).$$

假设 $(k-1)x=0*(0*x^{k-1})$, 由定理 2.1.5 得

$$\begin{aligned}kx=&(k-1)x+x=0*((0*((k-1)x))*x)\\=&0*((0*(0*(0*x^{k-1})))*x)\\=&0*((0*x^{k-1})*x)=0*(0*x^k).\end{aligned}$$

(2) 如果 $0*x^k=0$, 则

$$kx=0*(0*x^k)=0*0=0.$$

反过来, 如果 $kx=0*(0*x^k)=0$, 则

$$0*x^k=0*(0*(0*x^k))=0*0=0,$$

从而 $|x|_+=|x|$. 证毕

由定理 3.4.4 可见, 元素 x 在 BCI–代数中的阶与它在加法序半群中的阶保持一致. 特别是在广义结合 BCI–代数中, 元素 x 在 BCI–代数 X 中的阶与它在伴随群 $(X,+)$ 中的阶一致.

前面的讨论说明, 一个 BCI–代数 X 能派生一个加法序半群. 现在研究它的逆问题: 一个序半群能否派生出一个 BCI–代数?

定理 3.4.5 设 $(X,+,\leqslant)$ 是一个以 0 为幺元的可剩余交换序半群, 并且 0 为极大元, $a:b$ 表示 a 关于 b 的左剩余, 则 $(X,:,0)$ 是一个以 0 为零元的 BCI–代数. 特别地, 如果 0 是最小元, 则 $(X,:,0)$ 是一个以 0 为零元的 BCK–代数.

证明 根据定义 2.1.2 中的三个条件来验证. $\forall x,y,z\in X$ 有

(1) 如果 $x:y=0$, 则 $y+0\leqslant x$, 即 $y\leqslant x$. 反过来, 如果 $y\leqslant x$, 即 $y+0\leqslant x$, 从而 $0\leqslant x:y$, 但 0 为极大元, 故 $x:y=0$, 从而 $x:y=0\Leftrightarrow y\leqslant x$, 进而 $x:y=0$ 且 $y:x=0$ 当且仅当 $y\leqslant x$ 且 $x\leqslant y$ 当且仅当 $x=y$.

(2) 设 $x:0=y$, 由定理 3.4.2 知 $0+x\leqslant x$, 故 $x\leqslant y$. 但由于 $y=y+0\leqslant x$, 所以 $x=y$, 从而有 $x:0=x$.

(3) 设 $x:y=u, x:z=v, z:y=w$, 则有

$$u+y=y+u\leqslant x,\quad v+z=z+v\leqslant x,\quad w+y=y+w\leqslant z,$$

故 $y+w+v\leqslant z+v\leqslant x$, 从而 $w+v\leqslant u$, 故 $w\leqslant u:v$. 由 (1) 知 $(u:v):w=0$, 即

$$((x:y):(x:z)):(z:y)=0.$$

由定义 2.1.2 知, $(X,:,0)$ 是以 0 为零元的 BCI- 代数.

又由于 0 为幺元, 即

$$0+x=x+0=x,$$

如果 0 还是最大元, 即 $\forall x\in X$ 有 $x\leqslant 0$, 所以

$$x+0=0+x\leqslant 0,$$

故 $0\leqslant 0:x$. 但 0 是最大元, 从而 $0:x=0$, 所以 $(X,:,0)$ 是一个 BCK–代数. 证毕

3.4.2 用加法和加法序半群刻画几类 BCI–代数

定理 3.4.6 设 X 是 BCI–代数, 则

(1) X 是结合的当且仅当它的加法序半群 $(X,+,\leqslant)$ 是以 0 为零元的对合群;

(2) X 是广义结合的当且仅当其加法序半群 $(X,+,\leqslant)$ 是以 0 为零元的交换群.

证明 (1) 设 X 是结合的, 则 $\mathrm{AP}(X)=X$. 由定理 3.4.3 知, $(X,+,\leqslant)$ 是对合群, 0 必是 X 中的零元.

反过来, 如果 $(X,+,\leqslant)$ 是以 0 为零元的对合群, 则 $x+x=0$. 又由定理 3.4.2 知 $(0*x)+x=0$, 故 $0*x=x$, 所以 X 是结合的.

(2) 如果 X 是广义结合的, 则 $\mathrm{SP}(X)=X$. 由定理 3.2.15 知, $(X,+,\leqslant)$ 是交换群. 由 $0+x=0*(0*x)=x$ 知, 0 为 X 中的零元.

反过来, 设 $(X,+,\leqslant)$ 是以 0 为零元的交换群, 则

$$0+x=0*(0*x)=x,$$

故 X 是广义结合的. 证毕

定理 3.4.7 设 X 是 BCI–代数, 则 X 是拟结合的当且仅当 $\mathrm{SP}(X)$ 是加法序半群 $(X,+,\leqslant)$ 中的对合子群.

证明 由定理 3.4.3 知, $\mathrm{SP}(X)$ 是加法序半群的子群.

设 X 是拟结合的, $\forall x\in\mathrm{SP}(X)$, 由定理 3.3.2 和定理 3.4.4 知, $x+x=0$, 故 $\mathrm{SP}(X)$ 是 $(X,+,\leqslant)$ 的对合子群.

反过来, 如果 $\mathrm{SP}(X)$ 是 $(X,+,\leqslant)$ 的对合子群, 对任意 $x\in X$, 令 $y=0*x$, 则 $y\in\mathrm{SP}(X)$, 故 $y+y=0$, 即 $|y|\leqslant 2$. 从而 $|x|=|y|\leqslant 2$. 由定理 3.3.2 知, X 是拟结合的. 证毕

定理 3.4.8 BCI–代数 X 是诣零的当且仅当子群 $(\mathrm{SP}(X),+)$ 是周期群.

证明 设 X 是诣零的, 则 X 中的所有元素都有有限阶. 又由定理 3.4.4 知, $\forall x \in \mathrm{SP}(X), x$ 作为 BCI–代数中的元素与作为加法序半群中的元素, 其阶一致, 故 $\mathrm{SP}(X)$ 关于加法是周期群.

反过来, 设 $(\mathrm{SP}(X), +)$ 是周期群, $\forall x \in X$, 由定理 2.3.2 和定理 3.4.4 知

$$|x| = |0 * x| = |0 * x|_+.$$

由定理 2.1.6 知, $0 * x \in \mathrm{SP}(X)$, 由于 $|0 * x|_+$ 有限, 故 $|x|$ 有限, 从而 X 是诣零 BCI–代数. 证毕

3.4.3 加法序半群的理想

在 1.3 节中介绍了序半群的理想. 下面讨论 BCI–代数的加法序半群的理想的特点.

定理 3.4.9 在 BCI–代数 X 中, 广义结合部分 $\mathrm{SP}(X)$ 是加法序半群 $(X, +, \leqslant)$ 的最小理想.

证明 由于 $0 \in \mathrm{SP}(X)$, 所以 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的非空子集.

$\forall x \in X, \forall a \in \mathrm{SP}(X)$, 由定理 2.1.6 知

$$x + a = a + x = 0 * ((0 * a) * x) \in \mathrm{SP}(X).$$

设 $b \leqslant a, b \in X$, 由于 a 是极小元, 所以 $b = a \in \mathrm{SP}(X)$, 所以 $\mathrm{SP}(X)$ 是 $(X, +, \leqslant)$ 的理想.

设 I 是 $(X, +, \leqslant)$ 的任一理想, 任取 $x \in I$, 由定理 3.4.2 知

$$0 = x + (0 * x) \in I.$$

$\forall a \in \mathrm{SP}(X)$ 有

$$a = 0 * (0 * a) = 0 + a \in I,$$

从而 $\mathrm{SP}(X) \subseteq I$, 所以 $\mathrm{SP}(X)$ 是加法序半群 $(X, +, \leqslant)$ 的最小理想. 证毕

定理 3.4.9 表明, BCI–代数 X 的加法序半群的理想都包含 $\mathrm{SP}(X)$. 另外, 定理 3.4.2 和定理 3.4.9 还说明, $\mathrm{SP}(X)$ 既是加法序半群 $(X, +, \leqslant)$ 的子群又是它的理想. 反过来, 还有如下定理:

定理 3.4.10 设 I 是 BCI–代数 $(X, *, 0)$ 的非空子集, 如果 I 既是加法序半群 $(X, +, \leqslant)$ 的理想又是子群, 则 $I = \mathrm{SP}(X)$.

证明 $\forall x \in I$, 由定理 3.4.2 知 $0 = x + (0 * x)$. 由于 I 是加法序半群 $(X, +, \leqslant)$ 的理想, 故 $0 \in I$. 但 I 是加法序半群 $(X, +, \leqslant)$ 的子群, 并且 $0 + 0 = 0$, 故 0 为子群 I 的零元, 从而

$$0 * (0 * x) = 0 + x = x,$$

即 $x \in \mathrm{SP}(X)$, 从而 $I \subseteq \mathrm{SP}(X)$. 又由定理 3.4.9 知, $\mathrm{SP}(X)$ 是 $(X, +, \leqslant)$ 的最小理想, 故 $\mathrm{SP}(X) = I$. 证毕

3.5 BCI–代数的伴随半群

已经知道, 每个群都同构于一个变换群, 所以研究群可以归结为研究变换群. 1995 年, 黄文平按照这种思想, 找到了 BCI–代数 X 上的一些变换作成的半群, 讨论了它的性质和作用, 并用它刻画了结合、广义结合和拟结合 BCI–代数.

3.5.1 概念和基本性质

定义 3.5.1 设 X 是 BCI–代数, $a \in X$, 令

$$a^{-1} : x \to xa^{-1} = x * a,$$

即

$$a^{-1}(x) = xa^{-1} = x * a,$$

则 a^{-1} 是 X 上的自映射, 将这样的有限个自映射的合成的全体记为 $M(X)$. 显然, $M(X)$ 关于映射的合成运算 "$\circ$" 作成一个半群, 称为 X 的伴随半群, 记为 $(M(X), \circ)$, 也简写为 $M(X)$.

显然, $\forall x \in X, x0^{-1} = x * 0 = x$, 所以 0^{-1} 是伴随半群 $M(X)$ 的幺元, 常将 0^{-1} 记为 1.

设 $\sigma, \tau \in M(X)$, $\forall x, y \in X$, 容易验证以下公式成立:

$$(x * y)\sigma = x\sigma * y, \tag{3.5.1}$$

$$(x\sigma * y)\tau = (x\tau * y)\sigma, \tag{3.5.2}$$

$$x(\sigma \circ \tau) = (x\sigma)\tau. \tag{3.5.3}$$

定理 3.5.1 BCI–代数 X 的伴随半群是以 0^{-1} 为幺元的交换幺半群, 令

$$\begin{aligned} & a^{-1} \circ b^{-1} \circ \cdots \circ c^{-1} \leqslant_1 u^{-1} \circ v^{-1} \circ \cdots \circ w^{-1} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X, (\cdots((x * a) * b) \cdots) * c \leqslant (\cdots((x * u) * v) \cdots) * w, \end{aligned}$$

则 $M(X)$ 是关于 "$\leqslant_1$" 的序半群.

证明 $\forall \sigma, \tau, \delta \in M(X)$, 显然有

$$(\sigma \circ \tau) \circ \delta = \sigma \circ (\tau \circ \delta).$$

设 $\sigma = a_1^{-1} \circ \cdots \circ a_n^{-1}$, $\tau = b_1^{-1} \circ \cdots \circ b_m^{-1}$, $\forall x \in X$, 有

$$x(\sigma \circ \tau) = (\cdots(((\cdots(x * a_1) * \cdots) * a_n) * b_1) * \cdots) * b_m$$

$$
\begin{aligned}
&=(\cdots(((\cdots(x*b_1)*\cdots)*b_m)*a_1)*\cdots)*a_n\\
&=x(\tau\circ\sigma),
\end{aligned}
$$

从而 $\sigma\circ\tau=\tau\circ\sigma$, 故 $M(X)$ 是以 0^{-1} 为幺元的交换半群.

容易验证, “$\leqslant_1$” 是 $M(X)$ 上的偏序. 设

$$
\sigma=a_1^{-1}\circ\cdots\circ a_n^{-1},\quad \tau=b_1^{-1}\circ\cdots\circ b_m^{-1},\quad \delta=c_1^{-1}\circ\cdots\circ c_k^{-1},
$$

并且 $\sigma\leqslant_1\tau$, 则有

$$
\begin{aligned}
x(\sigma\circ\delta)&=(\cdots((\cdots(x*a_1)*\cdots*a_n)*c_1)*\cdots)*c_k\\
&\leqslant(\cdots((\cdots(x*b_1)*\cdots*b_m)*c_1)*\cdots)*c_k\\
&=x(\tau\circ\delta),
\end{aligned}
$$

故 $\sigma\circ\delta\leqslant\tau\circ\delta$, 从而 $M(X)$ 为交换序半群.　　证毕

定理 3.5.2　在 BCI–代数 X 中, $\forall a,b\in X$ 有 $a^{-1}=b^{-1}\Leftrightarrow a=b$.

证明　如果 $a=b$, 则显然, $a^{-1}=b^{-1}$. 设 $a^{-1}=b^{-1}$, 即 $\forall x\in X$, 有

$$
x*a=x*b.
$$

取 $x=a$ 得 $a*b=0$, 取 $x=b$ 有 $b*a=0$, 故 $a=b$.　　证毕

记 $R(X)=\{a^{-1}|a\in X\}$. 在 1.3 节中可知, 在序半群 S 中, $\forall a,b\in S$, 如果满足 $bx\leqslant a$ 的 x 有最大元, 则将这个最大元叫做 a 关于 b 的左剩余, 记为 $a:b$. 将这个概念应用到伴随半群上, 有以下结论:

定理 3.5.3　在 BCI–代数 X 的伴随半群 $M(X)$ 中, $\forall a,b\in X$ 有

$$
a^{-1}:b^{-1}=(a*b)^{-1}.
$$

证明　$\forall x\in X$, 由式 (2.1.11) 得

$$
x(b^{-1}\circ(a*b)^{-1})=(x*b)*(a*b)\leqslant x*a=xa^{-1},
$$

故 $b^{-1}\circ(a*b)^{-1}\leqslant_1 a^{-1}$.

设 $\sigma\in M(X)$, $\sigma=u_1^{-1}\cdots u_n^{-1}$ 使得 $b^{-1}\circ\sigma\leqslant_1 a^{-1}$, 由式 (2.1.11), (2.1.2), (2.1.8) 得

$$
\begin{aligned}
x\sigma*x(a*b)^{-1}&=((\cdots(x*u_1)*\cdots)*u_n)*(x*(a*b))\\
&=(\cdots((x*(x*(a*b)))*u_1)*\cdots)*u_n\\
&\leqslant(\cdots((a*b)*u_1)*\cdots)*u_n
\end{aligned}
$$

$$=a(b^{-1}\circ\sigma)\leqslant aa^{-1}=a*a=0,$$

但 0 为极小元, 从而 $x\sigma*x(a*b)^{-1}=0$, 于是 $x\sigma\leqslant x(a*b)^{-1}$, 即 $\sigma\leqslant_1(a*b)^{-1}$, 所以

$$a^{-1}:b^{-1}=(a*b)^{-1}.$$

证毕

推论 3.5.1 $R(X)$ 关于半群的左剩余 “:” 封闭, $(R(X):,1)$ 也是 BCI–代数, 1 为其中的零元, 并且有

$$(X,*,0)\cong(R(X),:,1).$$

证明 $\forall x,y,z\in X$, 由定理 3.5.3 得

$$\begin{aligned}&((x^{-1}:y^{-1}):(x^{-1}:z^{-1})):(z^{-1}:y^{-1})\\=&((x*y)^{-1}:(x*z)^{-1}):(z*y)^{-1}\\=&(((x*y)*(x*z))*(z*y))^{-1}=0^{-1}=1,\end{aligned}$$

$$x^{-1}:1=x^{-1}:0^{-1}=(x*0)^{-1}=x^{-1},$$

$$\begin{aligned}x^{-1}:y^{-1}=1\text{ 且 }y^{-1}:x^{-1}=1\Leftrightarrow(x*y)^{-1}=0^{-1}=1\text{ 且 }(y*x)^{-1}=0^{-1}=1\\\Leftrightarrow x*y=y*x=0\Leftrightarrow x=y\Rightarrow x^{-1}=y^{-1}.\end{aligned}$$

由定义 2.1.2 知, $(R(X),:,1)$ 是 BCI–代数.

令 $\varphi:X\to R(X),a\to a^{-1}$, 由定理 3.5.3 知, φ 为 BCI–同态. 又由定理 3.5.2 知, φ 为双射, 故 $(X,*,0)\cong(R(X):1)$. 证毕

3.5.2 伴随半群中的可逆元

定义 3.5.2 设 $\sigma\in M(X)$, 如果存在 $\tau\in M(X)$, 使得

$$\sigma\circ\tau=\tau\circ\sigma=1,$$

则称 σ 为可逆元, 并且将 τ 叫做 σ 的逆元.

显然有以下结论:

(1) $M(X)$ 中的可逆元必是双射, 并且 σ 的逆元的逆元为 σ;

(2) $\sigma=a_1^{-1}\circ a_2^{-1}\circ\cdots\circ a_n^{-1}$ 可逆 $\Leftrightarrow a_1^{-1},a_2^{-1},\cdots,a_n^{-1}$ 均可逆;

(3) $M(X)$ 的可逆元的全体是 $M(X)$ 中的最大子群, 记为 $\mathrm{GM}(X)$.

定理 3.5.4 设 a 是 BCI–代数 X 中的元素, 如果 $a^{-1}\in M(X)$ 为可逆元, 则 $a\in\mathrm{SP}(X)$.

证明 由于 $aa^{-1}=a*a=0$, 并且

$$(0*(0*a))a^{-1}=(0*(0*a))*a=(0*a)*(0*a)=0,$$

故 $aa^{-1}=(0*(0*a))a^{-1}$. 由于 a^{-1} 为可逆元, 从而 a^{-1} 为单射, 故 $0*(0*a)=a$, 即 $a\in \mathrm{SP}(X)$. 证毕

但定理 3.5.4 的逆命题不真, 反例如下:

例 3.5.1　设 $X=\{0,1,a\}$, 运算 "$*$" 规定为

$*$	0	1	a
0	0	0	a
1	1	0	a
a	a	a	0

容易验证, $(X,*,0)$ 是 BCI–代数, $\mathrm{SP}(X)=\{0,a\}$, $a^{-1}:x\to x*a$, 即为 $0a^{-1}=a$, $1a^{-1}=a$, $aa^{-1}=0$, 其中 $a\in\mathrm{SP}(X)$, 但是 a^{-1} 却不是可逆元.

定理 3.5.5　设 σ 是伴随半群 $M(X)$ 的可逆元, 则存在 $u\in X$, 使得 $\sigma=u^{-1}$, 即 $\mathrm{GM}(X)\subseteq R(X)$.

证明　设 $\sigma=u_1^{-1}\circ u_2^{-1}\circ\cdots\circ u_n^{-1}$ 为可逆元, 则 $u_1^{-1},u_2^{-1},\cdots,u_n^{-1}$ 必可逆. 令

$$u=(\cdots(u_1*(0*u_2))*\cdots)*(0*u_n),$$

$\forall x\in X$, 由式 (2.1.9), (2.1.2) 得

$$\begin{aligned}x\sigma*xu^{-1}=&((\cdots((x*u_1)*u_2)*\cdots)*u_n)*(x*u)\\=&(\cdots(((x*(x*u))*u_1)*u_2)*\cdots)*u_n\\\leqslant&(\cdots((u*u_1)*u_2)*\cdots)*u_n\\=&(\cdots(((\cdots(0*(0*u_2))*\cdots)*(0*u_n))*u_2)*\cdots)*u_n\\=&(\cdots(((0*(0*u_2))*u_2)*\cdots)*((0*u_n)*u_n)\\=&\cdots=(0*(0*u_n))*u_n=0,\end{aligned}$$

即 $x\sigma*xu^{-1}\leqslant 0$, 但是 0 为极小元, 故 $x\sigma*xu^{-1}=0$.

另一方面, 由定理 3.5.4 知 $u_1,u_2,\cdots,u_n\in\mathrm{SP}(X)$, 即

$$0*(0*u_i)=u_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

由式 (3.5.2) 得

$$\begin{aligned}(xu^{-1}*x\sigma)\sigma=&((x\sigma)*(x\sigma))u^{-1}=0u^{-1}=0*u\\=&(\cdots((0*u_1)*(0*(0*u_2)))*\cdots)*(0*(0*u_n))\\=&(\cdots((0*u_1)*u_2)*\cdots)*u_n=0\sigma,\end{aligned}$$

但 σ 为双射, 故 $xu^{-1}*x\sigma=0$, 从而 $xu^{-1}=x\sigma$, 即 $\sigma=u^{-1}$. 证毕

定理 3.5.6 如果 $u^{-1} \in M(X)$ 是可逆元, 则 u^{-1} 的逆元为 $(0*u)^{-1}$.

证明 由于 u^{-1} 的逆元仍为可逆元, 由定理 3.5.5, 可设 u^{-1} 的逆元为 v^{-1}, 则

$$u^{-1} \circ v^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1} = 1,$$

故有

$$vv^{-1} = v * v = 0,$$

$$(0*u)v^{-1} = 0(u^{-1} \circ v^{-1}) = 01 = 0*0 = 0,$$

于是

$$vv^{-1} = (0*u)v^{-1},$$

但 v^{-1} 为单射, 故 $v = 0*u$, 从而 $v^{-1} = (0*u)^{-1}$. 证毕

定理 3.5.7 u^{-1} 为 $M(X)$ 中的可逆元 $\Leftrightarrow u^{-1} \circ (0*u)^{-1}$ 为单射.

证明 $\Rightarrow$ 由于 u^{-1} 可逆, 由定理 3.5.6 知, u^{-1} 的逆元为 $(0*u)^{-1}$, 故

$$u^{-1} \circ (0*u)^{-1}$$

也为单射.

$\Leftarrow$ $\forall x \in X$ 有

$$\begin{aligned}
&(x*((x*u)*(0*u)))(u^{-1} \circ (0*u)^{-1}) \\
=&((x*((x*u)*(0*u)))*u)*(0*u) \\
=&((x*u)*(0*u))*((x*u)*(0*u)) \\
=&0 = (0*u)*(0*u) \\
=&0(u^{-1} \circ (0*u)^{-1}).
\end{aligned}$$

由于 $u^{-1} \circ (0*u)^{-1}$ 为单射, 从而

$$x*((x*u)*(0*u)) = 0,$$

即

$$x \leqslant (x*u)*(0*u),$$

但是

$$(x*u)*(0*u) \leqslant x*0 = x,$$

故有

$$(x*u)*(0*u) = x,$$

即

$$x(u^{-1} \circ (0 * u)^{-1}) = x,$$

故

$$u^{-1} \circ (0 * u)^{-1} = 1,$$

从而 u^{-1} 可逆, 并且其逆为 $(0 * u)^{-1}$. 证毕

定理 3.5.8 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的理想当且仅当 $\forall a \in \mathrm{SP}(X)$, a^{-1} 为可逆元.

证明 $\Leftarrow$ 设 $a, b * a \in \mathrm{SP}(X)$, 则

$$0 * (0 * a) = a, \quad 0 * (0 * (b * a)) = b * a,$$

从而

$$b * a = 0 * (0 * (b * a)) = (0 * (0 * b)) * (0 * (0 * a)) = (0 * (0 * b)) * a,$$

即

$$ba^{-1} = (0 * (0 * b))a^{-1}.$$

但 a^{-1} 为可逆元, 故 a^{-1} 为单射, 从而 $0 * (0 * b) = b$, 即 $b \in \mathrm{SP}(X)$, 从而 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的理想.

$\Rightarrow$ 设 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的理想, 则必为闭理想. $\forall a \in \mathrm{SP}(X)$, 设 $xa^{-1} = ya^{-1}$, 即 $x * a = y * a$, 则

$$(x * y) * a = (x * a) * y = (y * a) * y = (y * y) * a = 0 * a \in \mathrm{SP}(X),$$

但是 $a \in \mathrm{SP}(X)$, 故 $x * y \in \mathrm{SP}(X)$. 又由于

$$0 = (x * a) * (y * a) \leqslant x * y,$$

即 $x * y \in \mathrm{KP}(X)$, 从而 $x * y \in \mathrm{SP}(X) \cap \mathrm{KP}(X) = 0$, 故 $x * y = 0$.

同理得 $y * x = 0$, 故 $x = y$, 从而 a^{-1} 为单射.

由于 $0 * a \in \mathrm{SP}(X)$, 同理也可证明 $0 * a$ 也为单射. 由定理 3.5.7 知, a^{-1} 为 $M(X)$ 中的可逆元. 证毕

定理 3.5.9 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的理想当且仅当 $\forall a \in \mathrm{SP}(X)$, a^{-1} 在 $\mathrm{KP}(X)$ 上的限制是单射.

证明 $\Rightarrow$ 由定理 3.5.8 知, a^{-1} 是 X 上的单射, 从而在 $\mathrm{KP}(X)$ 上的限制也是单射.

$\Leftarrow$ 显然, $0 \in \mathrm{SP}(X)$. 设 $a, b * a \in \mathrm{SP}(X)$, 则有

$$b * a = 0 * (0 * (b * a)) = (0 * (0 * b)) * a,$$

$$0 * a =((0 * (0 * b)) * (0 * (0 * b))) * a$$

$$\begin{aligned}&=((0*(0*b))*a)*(0*(0*b))\\&=(b*a)*(0*(0*b))\\&=(b*(0*(0*b)))*a,\end{aligned}$$

即

$$0a^{-1}=(b*(0*(0*b)))a^{-1}.$$

由于 $0, b*(0*(0*b))\in \mathrm{KP}(X)$, 并且 a^{-1} 为 $\mathrm{KP}(X)$ 上的单射, 故

$$b*(0*(0*b))=0.$$

又由于

$$(0*(0*b))*b=0,$$

故 $0*(0*b)=b$, 即 $b\in \mathrm{SP}(X)$, 所以 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的理想. 证毕

3.5.3 伴随半群的同态与同构

定理 3.5.10 设 $f:X\to \overline{X}, x\to \overline{x}$ 为 BCI–同态, $\mathrm{Im}f$ 为 $\bar{X}$ 的理想, 则

$$M_f:M(X)\to M(\overline{X}),\quad u^{-1}\cdots v^{-1}\to \bar{u}^{-1}\cdots \bar{v}^{-1}$$

为半群同态.

证明 设 $\sigma=u^{-1}\circ\cdots\circ v^{-1}, \tau=a^{-1}\circ\cdots\circ b^{-1}\in M(X)$ 且 $\sigma=\tau$, 即

$$u^{-1}\circ\cdots\circ v^{-1}=a^{-1}\circ\cdots\circ b^{-1},$$

$\forall \bar{x}\in \overline{X}$, 由式 (3.5.2) 得

$$\begin{aligned}&(\overline{x}(\overline{u}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{v}^{-1})*\overline{x}(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1}))(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1})\\&=(\overline{x}(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1})*\overline{x}(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1}))(\overline{u}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{v}^{-1})\\&=\overline{0}(\overline{u}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{v}^{-1})=(\cdots(\overline{0}*\overline{u})*\cdots)*\overline{v}\\&=\overline{(\cdots(0*u)*\cdots)v}\in \mathrm{Im}f.\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Im}f$ 是 $\overline{X}$ 的理想, 并且 $\overline{a},\cdots,\overline{b}\in \mathrm{Im}f$, 故

$$\begin{aligned}&(\overline{x}*\overline{x}(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1}))(\overline{u}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{u}^{-1})\\&=\overline{x}(\overline{u}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{v}^{-1})*\overline{x}(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1})\in \mathrm{Im}f.\end{aligned}$$

由于 $\overline{u},\cdots,\overline{v}\in \mathrm{Im}f, \mathrm{Im}f$ 是理想, 则 $\overline{x}*\overline{x}(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1})\in \mathrm{Im}f$, 故存在 $y\in X$, 使得

$$\overline{x}*\overline{x}(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1})=f(y)=\overline{y},$$

故有

$$
\begin{aligned}
&\overline{x}(\overline{u}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{v}^{-1})*\overline{x}(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1})\\
=&(\overline{x}*\overline{x}(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1}))(\overline{u}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{v}^{-1})\\
=&\overline{y}(\overline{u}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{v}^{-1})=\overline{y(u^{-1}\circ\cdots\circ v^{-1})}\\
=&\overline{y(a^{-1}\circ\cdots\circ b^{-1})}=\overline{y}(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1})\\
=&\overline{x}(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1})*\overline{x}(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1})=\bar{0}.
\end{aligned}
$$

同理可得

$$\overline{x}(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1})*\overline{x}(\overline{u}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{v}^{-1})=\bar{0},$$

故有

$$\overline{x}(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1})=\overline{x}(\overline{u}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{v}^{-1}).$$

由 $\overline{x}$ 的任意性知

$$\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1}=\overline{u}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{v}^{-1},$$

即 $M_f(\sigma)=M_f(\tau)$, 从而 M_f 是 $M(X)$ 到 $M(\overline{X})$ 的映射.

显然有

$$
\begin{aligned}
&\sigma\circ\tau=u^{-1}\circ\cdots\circ v^{-1}\circ a^{-1}\circ\cdots\circ b^{-1}\\
\to&(\overline{u}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{v}^{-1})\circ(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1})=M_f(\sigma)\circ M_f(\tau),
\end{aligned}
$$

故 M_f 是 $M(X)$ 到 $M(\overline{X})$ 的半群同态. 证毕

推论 3.5.2 如果 BCI–代数 X 与 $\overline{X}$ 同态, 则它们的伴随半群也同态, 即 $M(X)\sim M(\overline{X})$.

证明 设 f 是 $X\to\overline{X}$ 的同态满射, 显然, $\mathrm{Im}f=\overline{X}$, 从而 $\mathrm{Im}f$ 是 $\overline{X}$ 的理想. 由定理 3.5.10 知, M_f 是半群 $M(X)$ 到 $M(\overline{X})$ 的同态满射, 从而 $M(X)$ 与 $M(\overline{X})$ 作为半群也同态. 证毕

推论 3.5.3 如果两个 BCI–代数 X 与 $\overline{X}$ 同构, 则它们的伴随半群 $M(X)$ 与 $M(\overline{X})$ 也同构.

证明 由推论 3.5.2 可知, M_f 是 $M(X)$ 到 $M(\overline{X})$ 的同态满射. 下面证明 M_f 是单射即可.

设 $M_f(u^{-1}\circ\cdots\circ v^{-1})=M_f(a^{-1}\circ\cdots\circ b^{-1})$, 即

$$\overline{u}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{v}^{-1}=\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\bar{b}^{-1},$$

任取 $x\in X$ 有

$$\overline{x}(\overline{u}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{v}^{-1})=\overline{x}(\overline{a}^{-1}\circ\cdots\circ\overline{b}^{-1}),$$

即

$$\overline{x(u^{-1}\circ\cdots\circ v^{-1})}=\overline{x(a^{-1}\circ\cdots\circ b^{-1})}.$$

由于 f 为单射, 从而有

$$x(u^{-1}\circ\cdots\circ v^{-1})=x(a^{-1}\circ\cdots\circ b^{-1}),$$

故 $u^{-1}\circ\cdots\circ v^{-1}=a^{-1}\circ\cdots\circ b^{-1}$, 于是 M_f 为单射, 故 M_f 为半群同构. 证毕

3.6 伴随半群与加法半群的关系

3.4 节和 3.5 节通过加法序半群和伴随半群刻画了 BCI 代数与群和半群的关系, 特别是用加法序半群可以给出结合、广义结合和拟结合 BCI–代数的等价条件. 本节一方面也用伴随半群给出结合、广义结合和拟结合 BCI–代数的等价条件, 还要研究加法序半群和伴随半群之间的关系.

3.6.1 用伴随半群刻画结合、广义结合和拟结合 BCI–代数

先用伴随半群及其可逆元给出广义结合 BCI–代数的等价刻画.

定理 3.6.1 设 $M(X)$ 是 BCI–代数 X 的伴随半群, 则 X 是广义结合的当且仅当 $M(X)$ 是群.

证明 $\Rightarrow$ 如果 X 是广义结合的, 则 $\forall a,x\in X$, 由式 (3.2.7) 得

$$x(a^{-1}\circ(0*a)^{-1})=(x*a)*(0*a)=x*0=x,$$

故 $a^{-1}\circ(0*a)^{-1}=1$, 从而 a^{-1} 为可逆元, 则 $\forall\sigma\in M(X)$, σ 可逆, 从而 $M(X)$ 是群.

$\Leftarrow$ 设 $M(X)$ 是群, $\forall a\in X, a^{-1}$ 必为群 $M(X)$ 中的可逆元. 由定理 3.5.4 知 $a\in \mathrm{SP}(X)$, 从而 $\mathrm{SP}(X)=X$, 即 X 是广义结合的. 证毕

定理 3.6.2 BCI–代数 X 是广义结合的当且仅当 $\forall a,b\in X$ 有

$$a^{-1}\circ b^{-1}=(a*(0*b))^{-1}.$$

证明 $\Rightarrow$ 令 $u=a*(0*b)$, $\forall x\in X$ 有

$$x(a^{-1}\circ b^{-1})=(x*a)*b.$$

又由定理 3.2.3 知

$$xu^{-1}=x*(a*(0*b))=(0*b)*(a*x)=(0*(a*x))*b=(x*a)*b,$$

故

$$a^{-1}\circ b^{-1}=(a*(0*b))^{-1}.$$

$\Leftarrow$　$\forall x \in X$, 由已知得

$$x*(a*(0*b))=(x*a)*b.$$

取 $a=0, b=x$ 得

$$x*(0*(0*x))=(x*0)*x=(x*x)*0,$$

但显然 $(0*(0*x))*x=0$, 故 $0*(0*x)=x$, 即 X 是广义结合的.　　证毕

下面再用伴随半群刻画结合 BCI–代数.

定理 3.6.3　设 $M(X)$ 是 BCI–代数 X 的伴随半群, 则 X 是结合的当且仅当 $M(X)$ 是对合群.

证明　$\Rightarrow$　由于 X 是结合的, 则必是广义结合的. 由定理 3.5.1 和定理 3.6.1 知, $M(X)$ 是以 0^{-1} 为幺元的交换群. $\forall \sigma=a^{-1}\circ\cdots\circ b^{-1}\in M(X), \forall x \in X$, 于是有

$$\begin{aligned}x(\sigma\circ\sigma)=&(\cdots(((\cdots(x*a)*\cdots)*b)*a)*\cdots)*b\\=&((\cdots((x*a)*a)*\cdots)*b)*b\\=&(\cdots(x*(a*a))*\cdots)*(b*b)=x*0,\end{aligned}$$

从而 $\sigma\circ\sigma=0^{-1}$, 即 $M(X)$ 是对合群.

$\Leftarrow$　$\forall x, a \in X$, 由于 $M(X)$ 是对合群, 则必有 $a^{-1}\circ a^{-1}=0^{-1}$, 从而

$$(x*a)*a=x(a^{-1}\circ a^{-1})=x.$$

由定理 3.1.1 知, X 是结合的.　　证毕

定理 3.6.4　BCI–代数 X 是结合的当且仅当 $\forall a, b \in X$ 有

$$a^{-1}\circ b^{-1}=(a*b)^{-1}.$$

证明　$\Rightarrow$　由于结合 BCI–代数 X 必是广义结合的, 由定理 3.6.2 知

$$a^{-1}\circ b^{-1}=(a*(0*b))^{-1}.$$

由于 X 是结合的, 则由定理 3.1.1 知 $0*b=b$, 故

$$a^{-1}\circ b^{-1}=(a*b)^{-1}.$$

$\Leftarrow$　由于

$$a^{-1}\circ b^{-1}=(a*b)^{-1},$$

故

$$b^{-1}=0^{-1}\circ b^{-1}=(0*b)^{-1}.$$

由定理 3.5.2 知 $b=0*b$, 从而 X 是结合的. 证毕

定理 3.6.5 BCI–代数 X 是拟结合的当且仅当 $\forall a,b\in X$, 有

$$a^{-1}\circ b^{-1}\leqslant_1 (0*(a*b))^{-1}.$$

证明 $\Rightarrow$ $\forall a,b,x\in X$, 由式 (3.3.1), (3.3.4) 知

$$\begin{aligned}x(a^{-1}\circ b^{-1}) =&((x*0)*a)*b\leqslant (x*(0*a))*b\\ \leqslant& x*((0*a)*b)=x*(0*(a*b))\\ =&x(0*(a*b))^{-1},\end{aligned}$$

故

$$a^{-1}\circ b^{-1}\leqslant_1 (0*(a*b))^{-1}.$$

$\Leftarrow$ 由已知得

$$a^{-1}=a^{-1}\circ 0^{-1}\leqslant_1 (0*(a*0))^{-1}=(0*a)^{-1},$$

从而

$$0*a\leqslant 0*(0*a).$$

但由定理 2.1.6 知, $0*a,0*(0*a)$ 都是极小元, 故 $0*a=0*(0*a)$, 从而 X 是拟结合的. 证毕

3.6.2 BCI – 代数中广义结合部分的伴随半群

为叙述方便起见, 将 BCI–代数 X 的加法序半群简称为加法半群, 并简记为 $(X,+)$, 将 X 的伴随半群记为 $(M(X),\circ)$, 以便把它们的运算区别开来.

在 BCI–代数 X 中, 其广义结合部分

$$\mathrm{SP}(X)=\{a\in X\mid 0*(0*a)=a\}$$

起着重要的作用, 如 $(\mathrm{SP}(X),*,0)$ 是广义结合 BCI-代数, 它是加法半群 $(X,+)$ 中的最大子群等.

由于 $(\mathrm{SP}(X),*,0)$ 是 X 的广义结合子代数, 则由定理 3.6.1 直接可得到如下定理:

定理 3.6.6 BCI–代数 X 的广义结合子代数 $(\mathrm{SP}(X),*,0)$ 的伴随半群 $M(\mathrm{SP}(X))$ 是以 0^{-1} 为幺元的交换群.

要特别注意: X 的伴随半群 $M(X)$ 中的元素 a^{-1} 是 X 上的自映射, 而 $M(\mathrm{SP}(X))$ 中的元素 a^{-1} 是 $\mathrm{SP}(X)$ 上的自映射, 它们是不同的概念.

例如, 在例 3.5.1 中, $M(X)$ 中的元素 a^{-1} 为

$$a^{-1}: 0 \to a, \quad 1 \to a, \quad a \to 0.$$

上述 a^{-1} 不是单射, 故不是 $M(X)$ 中的可逆元. 但是, 由于 $\mathrm{SP}(X) = \{0, a\}$, 所以 $M(\mathrm{SP}(X))$ 中的元素 a^{-1} 为

$$a^{-1}: 0 \to a, \quad a \to 0.$$

上述 a^{-1} 是双射, 进而是 $M(\mathrm{SP}(X))$ 中的可逆元.

定理 3.6.7　$\forall \sigma \in M(\mathrm{SP}(X)$, 则必存在 $u \in \mathrm{SP}(X)$, 使得 $\sigma = u^{-1}$.

证明　由定理 3.6.6 知, $M(\mathrm{SP}(X))$ 是交换群, 故 σ 是可逆元. 由定理 3.5.5 知, 必存在 $u \in \mathrm{SP}(X)$, 使得 $\sigma = u^{-1}$.　证毕

这样一来, 就以 BCI–代数 X 为基础, 建立了两个交换群:

$$(\mathrm{SP}(X), +), \quad (M(\mathrm{SP}(X)), \circ),$$

它们之间的关系如下:

定理 3.6.8　设 X 是 BCI–代数, 则有

$$(\mathrm{SP}(X), +) \cong (M(\mathrm{SP}(X)), \circ).$$

证明　设 $f: a \to a^{-1}$, 显然, f 是 $\mathrm{SP}(X)$ 到 $M(\mathrm{SP}(X))$ 的映射. 又由定理 3.5.2 知, f 是单射. 由定理 3.6.7 知, f 是满射.

$\forall a, b \in \mathrm{SP}(X)$, 则有

$$a + b = 0 * ((0 * a) * b) = a * (0 * b).$$

由于 $\mathrm{SP}(X)$ 是广义结合的, 故由定理 3.6.2 得

$$a^{-1} \circ b^{-1} = (a * (0 * b))^{-1} = (a + b)^{-1},$$

故 f 是同构映射, 即 $(\mathrm{SP}(X), +) \cong (M(\mathrm{SP}(X)), \circ)$.　证毕

已经知道, $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的加法半群 $(X, +)$ 中的最大子群, X 的伴随半群 $M(X)$ 中的可逆元的集合 $\mathrm{GM}(X)$ 又是 $M(X)$ 中的最大子群, 它们之间的关系如下:

定理 3.6.9　如果 BCI–代数 X 的广义结合部分 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的理想, $\mathrm{GM}(X)$ 是 $M(X)$ 中的可逆元的集合, 则有

$$(\mathrm{SP}(X), +) \cong (\mathrm{GM}(X), \circ).$$

证明　设 $f(a) = a^{-1} \in M(X), \forall a \in \mathrm{SP}(X)$, 由于 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的理想, 则由定理 3.5.8 知, 只要 $a \in \mathrm{SP}(X)$, 就有 $a^{-1} \in \mathrm{GM}(X)$, 故 f 是 $\mathrm{SP}(X)$ 到 $\mathrm{GM}(X)$ 的映射. 由

定理 3.5.2 知, 它是单射. $\forall\sigma\in \mathrm{GM}(X)$, 由定理 3.5.5 知, 存在 $u\in X$, 使得 $\sigma=u^{-1}$. 再由定理 3.5.2 知 $u\in \mathrm{SP}(X)$, 显然 $f(u)=u^{-1}=\sigma$, 故 f 是 $\mathrm{SP}(X)$ 到 $\mathrm{GM}(X)$ 的满射.

$\forall a,b\in \mathrm{SP}(X), f(a)=a^{-1}, f(b)=b^{-1}$, 并且

$$a+b=0*((0*a)*b)=a*(0*b)\in \mathrm{SP}(X),$$

由定理 3.6.2 得

$$f(a+b)=(a*(0*b))^{-1}=a^{-1}\circ b^{-1}=f(a)\circ f(b),$$

故 f 是 $\mathrm{SP}(X)$ 到 $\mathrm{GM}(X)$ 的同构映射. 证毕

由定理 3.6.8 和定理 3.6.9 直接得到如下推论:

推论 3.6.1 如果 BCI–代数 X 的广义结合部分 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的理想, $M(\mathrm{SP}(X))$ 是 $\mathrm{SP}(X)$ 的伴随半群, $\mathrm{GM}(X)$ 是 $M(X)$ 中的可逆元的集合, 则它们关于映射的合成运算 $\circ$ 作成同构的群, 即

$$(M(\mathrm{SP}(X)),\circ)\cong(\mathrm{GM}(X),\circ).$$

下面讨论 X 的加法半群与 $M(\mathrm{SP}(X)$ 之间的关系.

定理 3.6.10 设 X 的加法半群为 $(X,+)$, $\mathrm{SP}(X)$ 的伴随半群为 $(M(\mathrm{SP}\ (X)),\circ)$, 则

$$f: a\to(0*(0*a))^{-1}$$

是 $(X,+)$ 到 $(M(\mathrm{SP}(X)),\circ)$ 的同态满射, 即 $(X,+)\sim(M(\mathrm{SP}(X)),\circ)$, 并且

$$\ker f=\mathrm{KP}(X).$$

证明 $\forall a\in X$, 由定理 2.1.6 知 $0*(0*a)\in \mathrm{SP}(X)$, 故

$$(0*(0*a))^{-1}\in M(\mathrm{SP}(X)),$$

所以 f 是 $(X,+)$ 到 $(M(\mathrm{SP}(X)),\circ)$ 的映射.

由定理 3.6.7 知 $\forall\sigma\in M(\mathrm{SP}(X))$, 存在 $u\in \mathrm{SP}(X)$, 使得 $\sigma=u^{-1}$, 从而

$$u=0*(0*u),$$

故 $f(u)=u^{-1}=\sigma$, 从而 f 为满射.

$\forall a,b\in X, a\to(0*(0*a))^{-1}, b\to(0*(0*b))^{-1}$. 由于

$$a+b=0*((0*a)*b)\in \mathrm{SP}(X),$$

$$0*(a+b)=0*(0*((0*a)*b))=(0*a)*(0*(0*b)),$$

$$0*(0*(a+b))=(0*(0*a))*(0*(0*(0*b))),$$

由定理 3.6.2 知

$$\begin{aligned}a+b\to(0*(0*(a+b)))^{-1}&=[(0*(0*a))*(0*(0*(0*b)))]^{-1}\\&=(0*(0*a))^{-1}\circ(0*(0*b))^{-1}\\&=f^{-1}(a)\circ f^{-1}(b),\end{aligned}$$

故 f 为 $(X,+)\to(S(X),\circ)$ 的同态满射, 即 $(X,+)\sim(\mathrm{SP}^{-1}(X),\circ)$.

设 $a\in\ker f$, 则 $f(a)=(0*(0*a))^{-1}=0^{-1}$. 由定理 3.5.2 知 $0*(0*a)=0$, 从而

$$0*a=0*(0*(0*a))=0*0=0,$$

于是 $a\in\mathrm{KP}(X)$.

反过来, 如果 $a\in\mathrm{KP}(X)$, 即 $0*a=0$, 则 $0*(0*a)=0$. $\forall x\in X$ 有

$$xf(a)=x*(0*(0*a))=x*0=x0^{-1},$$

故 $f(a)=0^{-1}$, 则 $a\in\ker f$, 从而 $\ker f=\mathrm{KP}(X)$.　　证毕

定理 3.6.11　BCI–代数 X 是拟结合的当且仅当 $M(\mathrm{SP}(X))$ 是对合群.

证明　由定理 3.4.7 知, X 是拟结合的当且仅当 $\mathrm{SP}(X)$ 是加法半群 $(X,+)$ 的对合子群. 又由定理 3.6.8 知 $(\mathrm{SP}(X),+)\cong(M(\mathrm{SP}(X)),\circ)$, 故 X 是拟结合的当且仅当 $(M(\mathrm{SP}(X)),\circ)$ 是对合群.　　证毕

3.6.3　结合、广义结合 BCI–代数的加法半群与伴随半群

在广义结合 BCI–代数 X 中, 令

$$x+y=x*(0*y).$$

3.2 节已经证明了 $(X,+)$ 是一个可换群, 并称之为 X 的伴随群.

3.4 节已经说明了广义结合 BCI–代数 X 的加法半群是群, 并且与伴随群一致.

下面给出广义结合 BCI–代数的加法半群与伴随半群之间的关系.

定理 3.6.12　BCI–代数 X 是广义结合的当且仅当 X 的加法半群与伴随半群同构, 即 $(X,+)\cong(M(X),\circ)$.

证明　$\Rightarrow$　由于 X 是广义结合的, 故 $\mathrm{SP}(X)=X$, $M(\mathrm{SP}(X))=M(X)$, 则由定理 3.6.8 可得 $(X,+)\cong(M(X),\circ)$.

$\Leftarrow$　设 $(X,+)\cong(M(X),\circ)$, 由定理 3.5.1 知, X 的伴随半群 $(M(X),\circ)$ 是以 0^{-1} 为幺元的交换幺半群, 故 X 的加法序半群 $(X,+)$ 是含零元的加法序半群. 设 $\bar{0}$ 是 $(X,+)$ 的零元, 则由定理 3.4.2 知

$$0*\bar{0}=\bar{0}+0*\bar{0}=0*((0*\bar{0})*(0*\bar{0}))=0,$$

$$\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} = 0 * ((0 * \dot{0}) * \bar{0}) = 0 * (0 * \bar{0}) = 0,$$

即 0 为加法半群的零元. 由定理 3.4.6 知, X 是广义结合的. 证毕

定理 3.6.13 如果 BCI–代数 X 是结合的, 则 $(X,+)$ 和 $(M(X),\circ)$ 都是对合群, 并且 $(X,+) \cong (M(X),\circ)$. 反过来, 如果 $(X,+)$ 或者 $(M(X),\circ)$ 是对合群, 则 X 是结合的.

证明 $\Rightarrow$ 由于 X 是结合的, 则由定理 3.4.6 和定理 3.6.3 知, $(X,+)$ 和 $(M(X),\circ)$ 都是对合群. 再由定理 3.6.12 知 $(X,+) \cong (M(X),\circ)$.

$\Leftarrow$ 如果 $M(X)$ 为对合群, 则由定理 3.6.3 知, X 为结合的. 如果 $(X,+)$ 是对合群, 则由定理 3.4.6 知, X 是结合的. 证毕

第 4 章 BCI–半群 (IS–代数)

1993 年, 韩国数学家田英培等通过在 BCI–代数上再赋予半群结构, 又建立了 BCI–半群 (后来称为 IS–代数). 人们之所以重视 IS–代数, 一方面, 由于它是一类以 BCI–代数为基础的逻辑代数; 另一方面, 由于环关于 “–” 和 “·” 运算很自然地构成 IS–代数的特例, IS–代数就像半环和拟环一样, 成为环概念的一种新的延伸. 本章以田英培引入的 BCI–半群 (IS–代数) 的概念和性质为基础, 结合辛小龙、杨闻起等的研究成果, 建立起了一套 IS–代数的理论体系.

4.1 基本概念和性质

本节介绍 BCI–半群 (IS–代数) 的有关概念和基本性质, 并给出一些常见的 IS–代数, 如 IM–代数、IG–代数、KS–代数、AS–代数、PS–代数、QS–代数和无零因子 IS–代数等.

4.1.1 基本概念

定义 4.1.1 设 X 是非空集合, 它带有两种二元运算 “$*$” 和 “$\cdot$” 及一个常元 0. 如果

(1) $(X,*,0)$ 是 BCI 代数;

(2) $(X,\cdot)$ 是半群;

(3) “$\cdot$” 对 “$*$” 的左、右分配律成立, 即 $\forall x,y,z\in X$ 有

$$x\cdot(y*z)=(x\cdot y)*(x\cdot z),\quad (y*x)\cdot z=(y\cdot z)*(x\cdot z),$$

则称 X 关于这两种运算和常元 0 作成一个 BCI 半群, 也称之为 IS–代数, 记为 $(X,*,\cdot,0)$. 在不致混淆时, 也简记为 X. 为书写方便起见, 还把 $x\cdot y$ 简记为 xy.

由定义 4.1.1 可见, IS–代数是由 BCI 代数上添加一个半群结构而得的.

定义 4.1.2 在 IS–代数 X 中, 如果存在 $1\in X$, 使得 $\forall x\in X$ 有

$$1x=x1=x,$$

则称 1 为 X 中的幺元, 称 X 为 BCI–幺半群, 也称为 IM–代数.

在 BCI–幺半群 X 中, $a\in X$, 如果存在 $b\in X$, 使得

$$ab=ba=1,$$

则称 a 可逆, 将 b 叫做 a 的逆元, 记为 a^{-1}. 如果 X 中的每个非零元都可逆, 即 X 中的非零元关于乘法做成群, 则称 $(X,*,\cdot,0)$ 为 BCI–群, 也称之为 IG–代数.

显然, IS–代数 X 是 IM–代数当且仅当 X 关于乘法是幺半群. X 是 IG–代数当且仅当 X 中的每个非零元都关于乘法做成群.

例 4.1.1 设 $\mathbf{Z}$ 是整数集, $(\mathbf{Z},-,0)$ 是 BCI–代数, $(\mathbf{Z},\cdot)$ 是幺半群, 并且 $\cdot$ 对 $-$ 的左、右分配律都成立, 故 $(\mathbf{Z},-,\cdot,0)$ 是以 1 为幺元的 BCI–幺半群, 即为 IM–代数.

例 4.1.2 $X=\{0,a,b,c\}$, 规定 "$*$" 和 "$\cdot$" 如下:

$*$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	c
b	0	a	b	c
c	0	0	0	0

容易验证, $(X,*,\cdot,0)$ 是 BCI–半群, 但不是 BCI–幺半群, 更不是 BCI 群.

例 4.1.3 设 $(X,*,0)$ 是 BCI 代数, $\mathrm{Hom}(X)$ 表示 X 上 BCI–自同态的全体, 0 表示 X 上的零变换, 1_X 是 X 上的恒等自映射. 定义 $\mathrm{Hom}(X)$ 中的运算 "$*$" 和 "$\cdot$" 为

$$(f*g)(x)=f(x)*g(x),\quad \forall x\in X,$$

$$(fg)(x)=f(g(x)),\quad \forall x\in X.$$

容易验证, $(\mathrm{Hom}(X),*,\cdot,0)$ 是以 1_X 为幺元的 IM–代数.

定理 4.1.1 设 $(R,+,\cdot)$ 是环 (含幺环、除环), 则 $(R,-,\cdot,0)$ 是 IS–代数 (IM–代数、IG–代数).

证明 设 $(R,+,\cdot)$ 是环, 则 $(R,+)$ 是加群. 由例 2.1.3 知, $(R,-,0)$ 是 BCI–代数. 又由于 $(R,\cdot)$ 是半群, 并且乘法对减法的左右分配律成立, 故 $(R,-,\cdot,0)$ 是 BCI–半群, 即 IS–代数.

如果环 R 含幺元 1, 则显然, $(R,-,\cdot,0)$ 是 BCI–幺半群, 即为 IM–代数. 如果 R 为除环, 则显然, $(R,-,\cdot,0)$ 是 BCI 群, 即为 IG–代数. 证毕

定理 4.1.1 表明, IS–代数也可视为环概念的一般化.

定理 4.1.2 在 BCI–半群 (IS–代数)X 中, $\forall x,y,z\in X$ 有

(1) $0x=x0=0$;

(2) $x\leqslant y\Rightarrow xz\leqslant yz,\ zx\leqslant zy$.

证明 (1) $0=0x*0x=(0*0)x=0x$, 即 $0x=0$.

$$0=x0*x0=x(0*0)=x0,$$

即 $x0=0$.

(2) 由于 $x \leqslant y$, 即 $x * y = 0$, 故有

$$xz * yz = (x * y)z = 0z = 0,$$

$$zx * zy = z(x * y) = z0 = 0,$$

即 $xz \leqslant yz,\ zx \leqslant zy$. 证毕

定理 4.1.3 在 BCI–半群 (IS–代数)X 中, 如果 a 为 BCI–代数 X 的极小元, 则 $\forall x \in X,\ xa, ax$ 也是极小元.

证明 由于 a 为极小元, 则由定理 2.1.6 知 $0 * (0 * a) = a$, 由定理 4.1.2 得

$$0 * (0 * xa) = x0 * (x0 * xa) = x(0 * (0 * a)) = xa,$$

$$0 * (0 * ax) = 0x * (0x * ax) = (0 * (0 * a))x = ax,$$

从而 xa, ax 都是极小元. 证毕

4.1.2 KS–代数、AS–代数、PS–代数和 QS–代数

设 $(X, *, \cdot, 0)$ 是 IS–代数, 在第 3 章已经把 BCI–代数 $(X, *, 0)$ 的 BCK–部分、结合部分、广义结合部分和拟结合部分分别记为

$$\mathrm{KP}(X) = \{x \in X \,|0 * x = 0\},$$

$$\mathrm{AP}(X) = \{x \in X \,|0 * x = x\},$$

$$\mathrm{SP}(X) = \{x \in X \,|0 * (0 * x) = x\},$$

$$\mathrm{QP}(X) = \{x \in X \,|0 * (0 * x) = 0 * x\}.$$

另外, 由定理 3.2.13 知, $\mathrm{SP}(X)$ 为 X 的极小元的集合.

定理 4.1.4 设 $(X, *, \cdot, 0)$ 是 IS–代数, 则 $\mathrm{KP}(X)$, $\mathrm{AP}(X)$, $\mathrm{SP}(X)$, $\mathrm{QP}(X)$ 都是半群 $(X, \cdot)$ 的理想.

证明 $\forall a \in \mathrm{KP}(X)$, 即 $0 * a = a$, $\forall x \in X$ 有

$$0 * (ax) = a0 * (ax) = a(0 * x) = a0 = 0,$$

$$0 * (xa) = 0a * (xa) = (0 * x)a = 0a = 0,$$

故 $ax, xa \in \mathrm{KP}(X)$, 从而 $\mathrm{KP}(X)$ 是半群 $(X, \cdot)$ 的理想.

同理可证明, $\mathrm{AP}(X)$, $\mathrm{SP}(X)$, $\mathrm{QP}(X)$ 都是半群 $(X, \cdot)$ 的理想. 证毕

定义 4.1.3 设 $(X, *, \cdot, 0)$ 是 IS–代数, 如果 $(X, *, 0)$ 是 BCK–代数 (结合的、广义结合的、拟结合的), 则称 $(X, *, \cdot, 0)$ 是 KS–代数 (AS–代数、PS–代数、QS–代数).

显然, IS 代数 X 是 KS–代数 $\Leftrightarrow \mathrm{KP}(X) = X$, X 是 AS–代数 $\Leftrightarrow \mathrm{AP}(X) = X$, X 是 PS–代数 $\Leftrightarrow \mathrm{SP}(X) = X \Leftrightarrow \mathrm{KP}(X) = 0$, X 是 QS–代数 $\Leftrightarrow \mathrm{QP}(X) = X$.

又由 $\mathrm{KP}(X) \cap \mathrm{SP}(X) = 0$ 知, 不存在既是 KS–代数又是 PS–代数的非零 IS–代数.

定理 4.1.5 设 X 是 IM–代数, 1 为幺元.

(1) 如果 $1 \in \mathrm{KP}(X)$, 则 X 是 KS–代数;

(2) 如果 $1 \in \mathrm{AP}(X)$, 则 X 是 AS–代数;

(3) 如果 $1 \in \mathrm{SP}(X)$, 则 X 是 PS–代数;

(4) 如果 $1 \in \mathrm{QP}(X)$, 则 X 是 QS–代数.

证明 (1) 由定理 4.1.4 知, $\mathrm{KP}(X)$ 是半群 $(X, \cdot)$ 的理想, 并且 1 为幺元, $\forall x \in X$ 有 $x = x1 \in \mathrm{KP}(X)$. 从而 $\mathrm{KP}(X) = X$, 即 X 是 KS–代数.

其他同理可证. 证毕

推论 4.1.1 设 X 是 IM–代数.

(1) 如果 $\mathrm{KP}(X)$ 中包含一个可逆元, 则 X 是 KS–代数;

(2) 如果 $\mathrm{AP}(X)$ 中包含一个可逆元, 则 X 是 AS–代数;

(3) 如果 $\mathrm{SP}(X)$ 中包含一个可逆元, 则 X 是 PS–代数;

(4) 如果 $\mathrm{QP}(X)$ 中包含一个可逆元, 则 X 是 QS–代数.

证明 (1) 设 a 为 $\mathrm{KP}(X)$ 的可逆元, 由于 $\mathrm{KP}(X)$ 为半群 $(X, \cdot)$ 的理想, 故 $1 = a^{-1}a \in \mathrm{KP}(X)$. 由定理 4.1.5 知, X 是 KS–代数.

(2)~(4) 同理可证. 证毕

4.1.3 无零因子 IS–代数

定义 4.1.4 在 IS–代数 X 中, 如果存在非零元 $a, b \in X$, 使得 $ab = 0$, 则称 a 为 X 的左零因子, b 为右零因子. 左零因子和右零因子统称为零因子.

这里主要讨论无零因子的 IS–代数. 与环中类似, 显然有如下结论:

(1) IS–代数 X 无零因子 $\Leftrightarrow$ 由 $ab = 0$ 可以推出 $a = 0$ 或 $b = 0$;

(2) 如果 IS–代数 X 无零因子, 则左、右消去律显然成立, 即

$$ab = ac, a \neq 0 \Rightarrow b = c,$$

$$ba = ca, a \neq 0 \Rightarrow b = c;$$

(3) 如果一个消去律成立, 则 IS–代数 X 必是无零因子的, 从而另一个消去律也成立.

定理 4.1.6 设 X 是无零因子 IS 代数.

(1) 如果 $\mathrm{KP}(X) \neq 0$, 则 X 是 KS 代数;

(2) 如果 $\mathrm{AP}(X) \neq 0$, 则 X 是 AS–代数;

(3) 如果 $\mathrm{SP}(X) \neq 0$, 则 X 是 PS–代数;

(4) 如果 $\mathrm{QP}(X) \neq 0$, 则 X 是 QS–代数.

证明 (1) 取 $b \in$KP(X), $b \neq 0$, 则 $0 * b = 0$. $\forall x \in X$, 由定理 4.1.4 知, KP(X) 是半群 $(X, \cdot)$ 的理想, 故 $bx \in$KP(X), 从而有 $0 * bx = 0$, 故有

$$b(0 * x) = b0 * bx = 0 * bx = 0 = b0.$$

由消去律得 $0 * x = 0$, 故 $x \in$KP(X), 即 KP$(X) = X$, 从而 X 是 KS–代数.

(2)~(4) 同理可证. 证毕

定义 4.1.5 设 A, B 是 IS–代数 X 的非空子集, 规定

$$AB = \{ab \,|a \in A, b \in B\},$$

并记 $\{a\} B = aB$, $A\{b\} = Ab$.

显然, I 是半群 $(X, \cdot)$ 的理想 $\Leftrightarrow IX, XI \subseteq I$.

定理 4.1.7 设 X 是 IS–代数, I, J 都是半群 $(X, \cdot)$ 的任意理想.

(1) $I \cap J = 0 \Rightarrow IJ = 0$;

(2) 如果 X 无零因子, 则 $IJ = 0 \Rightarrow I \cap J = 0$.

证明 (1) 由于 I, J 都是半群 $(X, \cdot)$ 的理想. 故 $IJ \subseteq I, IJ \subseteq J$, 从而 $IJ \subseteq I \cap J$. 由于 $I \cap J = 0$, 故 $IJ = 0$.

(2) 由于 $IJ = 0$, $\forall x \in I \cap J$, 即 $x \in I$ 且 $x \in J$, 从而 $xx \in IJ = 0$, 即 $xx = 0$, 但 X 无零因子, 故 $x = 0$, 即 $I \cap J = 0$. 证毕

推论 4.1.2 设 X 是 IS–代数, 则

$$\text{KP}(X)\text{SP}(X) = \text{SP}(X)\text{KP}(X) = 0,$$

$$\text{KP}(X)\text{AP}(X) = \text{AP}(X)\text{KP}(X) = 0.$$

证明 由定理 3.2.15 知 KP$(X) \cap$ SP$(X) = 0$. 再由定理 4.1.7 知

$$\text{KP}(X)\text{SP}(X) = 0.$$

由于 AP$(X) \subseteq$ SP(X), 故 KP(X)AP$(X) = 0$.

其他同理可证. 证毕

4.2 理想与子代数

1998 年, 田英培等建立了 IS–代数的理想理论, 并给出了闭理想的性质. 2001 年, Roh Eun Hwan 等给出了一类特殊理想, 即 a–理想.

4.2.1 概念与基本性质

定义 4.2.1 设 S 是 IS 代数 $(X, *, \cdot, 0)$ 的非空子集, 如果 S 对 $*$ 和 $\cdot$ 封闭, 即 $\forall x, y \in S$ 有 $x * y \in S$, $xy \in S$, 则称 S 为 X 的子代数.

例 4.2.1 设 $X = \{0, a, b, c\}$, 运算 "$*$", "$\cdot$" 规定为

$*$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	a	b	0

$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	c
b	0	a	b	c
c	0	0	0	0

容易验证, $(X,*,\cdot,0)$ 是 IS–代数, 并且 $\{0,b\}$, $\{0,c\}$ 都是 X 的子代数.

显然, S 是 IS–代数 X 的子代数 $\Leftrightarrow$ S 是半群 $(X,\cdot)$ 的子半群, 并且是 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的子代数. S 是 X 的子代数, 意味着 $(S,*,\cdot,0)$ 本身也是 IS–代数.

定理 4.2.1 在 IS–代数 X 中, KP(X), AP(X), SP(X), QP(X) 都是 X 的子代数. 当 X 是 IG-代数且这些子代数非零时, 它们也是 IG–代数.

证明 以 SP(X) 为代表来证明, 其他同理.

首先, 由定理 3.2.14 知, SP(X) 是 BCI–代数 X 的子代数. 其次, 由定理 4.1.4 知, SP(X) 是半群 $(X,\cdot)$ 的理想, 必是它的子代数, 故 SP(X) 是 IS–代数 X 的子代数.

如果 X 是 IM–代数, 设 1 为 X 的幺元, 取 a 为 SP(X) 中的任意非零元, 则

$$a1 = a \in \mathrm{SP}(X),$$

于是有

$$0*(0*a1) = a1,$$

即得

$$a(0*(0*1)) = a1.$$

由于 X 是 IG-代数, 即 a 可逆, 两端左乘 a^{-1} 得

$$0*(0*1) = 1,$$

从而 $1 \in$SP(X). 任取 $b \in$SP(X), 由定理 4.1.4 知, SP(X) 是半群 $(X,\cdot)$ 的理想, 故 $b^{-1} = b^{-1}1 \in$SP(X), 从而 (SP(X), $\cdot$) 是群, 故 (SP(X), $*,\cdot,0$) 是 IG 代数. 证毕

定义 4.2.2 设 A 是 IS 代数 $(X,*,\cdot,0)$ 中的非空子集, 如果

(1) $\forall x \in X, \forall a \in A$ 有 $xa, ax \in A$;

(2) $\forall x \in X$, $\forall a \in A$, 由 $x*a \in A$ 可推出 $x \in A$,

则称 A 为 IS–代数 X 的 I–理想, 简称 A 为 X 的理想.

显然, $\{0\}$ 是 X 的理想, 称为 X 的零理想. X 也是 X 的理想, 不等于 X 的理想叫做 X 的真理想.

在例 4.2.1 中, $\{0,c\}$ 是 X 的理想, 但 $\{0,a\}$ 不是 X 的理想, 因为 $c*a=a$, 但 $c \notin \{0,a\}$, 这说明子代数与理想是两个不同的概念.

如果 A 是 IS–代数 X 的理想, 任取 $a \in A$, 则 $0 = 0a \in A$, 即 IS–代数的理想必包含 0. 另外, 定义 4.2.2 中的条件 (1) 说明, A 是半群 $(X,\cdot)$ 的理想, 并且 $0 \in A$. 条件 (2) 说明 A 是 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的理想, 从而有如下定理:

定理 4.2.2 设 A 是 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 的非空子集, 则 A 是它的理想当且仅当

(1) A 是半群 $(X,\cdot)$ 的理想;

(2) A 是 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的理想.

定理 4.2.3 IS–代数 X 的 BCK-部分 $\mathrm{KP}(X)$ 和拟结合部分 $\mathrm{QP}(X)$ 是它的理想.

证明 由定理 4.1.4 知, $\mathrm{KP}(X)$ 和 $\mathrm{QP}(X)$ 都是半群 $(X,\cdot)$ 的理想. 又由定理 2.4.6 和定理 3.3.14 知, $\mathrm{KP}(X)$ 和 $\mathrm{QP}(X)$ 都是 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的理想, 故它们都是 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 的理想. 证毕

定理 4.2.4 设 $\{A_k\,|k\in K\}$ 是 IS–代数 X 的一族理想, 则

(1) $\bigcap\limits_{k\in K} A_k$ 也是 X 的理想;

(2) 如果 $\{A_k\,|k\in K\}$ 中的任意两个理想可比较, 即为一个理想链, 则 $\bigcup\limits_{k\in K} A_k$ 也是 X 的理想.

证明 由定理 1.2.13 知, $\bigcap\limits_{k\in K} A_k$, $\bigcup\limits_{k\in K} A_k$ 都是半群 $(X,\cdot)$ 的理想. 再由定理 2.4.4 知, $\bigcap\limits_{k\in K} A_k$, $\bigcup\limits_{k\in K} A_k$ 又是 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的理想, 故它们是 IS 代数 X 的理想. 证毕

但是, IS–代数的任意两个理想之并未必是它的理想.

例 4.2.2 设 $X=\{0,a,b,c\}$, 运算 "$*$", "$\cdot$" 规定如下:

$*$	0	a	b	c
0	0	0	b	b
a	a	0	c	b
b	b	b	0	0
c	c	b	a	0

$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
c	0	a	b	c

容易验证, 它是一个 IS–代数, 并且 $\{0,a\},\{0,b\}$ 都是 X 的理想, 但 $\{0,a\}\cup\{0,b\}=\{0,a,b\}$ 不是 X 的理想.

4.2.2 生成理想

在 BCI–代数 $(X,*,0)$ 中, 把包含 A 的全部理想的交 (即包含 A 的最小理想) 叫做 A 生成的理想, 记为 $(A]$, 并且有如下公式:

$$(A]=\{x\in X|\ \text{存在 } a_1,a_2,\cdots,a_n\in A,\ \text{使得 } (\cdots((x*a_1)*a_2)*\cdots)*a_n=0\}.$$

在 IS 代数 X 中, 为了建立类似的概念和性质, 引入一个记号.

设 $x,a_1,a_2,\cdots,a_n\in X$, 记

$$(\cdots((x*a_1)*a_2)*\cdots)a_n=x*\sum_{i=1}^{n}a_i,$$

由式 (2.1.9) 得到

$$\left(x*\sum_{i=1}^{n}a_i\right)*\sum_{j=1}^{m}b_j=\left(x*\sum_{j=1}^{m}b_j\right)*\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

定义 4.2.3 设 A 是 IS–代数 X 的非空子集, 把 X 中全体包含 A 的理想之交叫做由 A 生成的理想, 记为 $[A]$.

显然, $[A]$ 是包含 A 的最小理想, 并且如果 $A\subseteq B$, 则 $[A]\subseteq[B]$. 另外, A 为 X 的理想当且仅当 $A=[A]$.

定理 4.2.5 设 $(X,*,\cdot,0)$ 是 IS–代数, A 是半群 $(X,\cdot)$ 的理想, 则

$$[A]=\left\{x\in X\;\middle|\;\text{存在 }a_1,a_2,\cdots,a_n\in A,\text{ 使得 }x*\sum_{i=1}^{n}a_i=0\right\}.$$

证明 设

$$B=\left\{x\in X\;\middle|\;\text{存在 }a_1,a_2,\cdots,a_n\in A,\text{ 使得 }x*\sum_{i=1}^{n}a_i=0\right\}.$$

首先, 证明 B 是半群 $(X,\cdot)$ 的理想. $\forall x\in X$, $\forall b\in B$, 则存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$, 使得

$$b*\sum_{i=1}^{n}a_i=0,$$

从而

$$xb*\sum_{1=1}^{n}xa_i=x\left(b*\sum_{i=1}^{n}a_i\right)=x0=0,$$

$$bx*\sum_{i=1}^{n}a_ix=\left(b*\sum_{i=1}^{n}a_i\right)x=0x=0.$$

由于 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$, A 为半群 $(X,\cdot)$ 的理想, 故

$$xa_1,xa_2,\cdots,xa_n,a_1x,a_2x,\cdots,a_nx\in A,$$

从而 xb, $bx\in B$, 即说明 B 是半群 $(X,\cdot)$ 的理想.

其次, 由于 A 是半群 $(X,\cdot)$ 的理想, A 中必有零元, 则由定理 2.4.5 知, B 是 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的包含 A 的最小理想, 从而 B 必是包含 A 的关于 IS–代数 X 的理想.

最后, 证明 $B=[A]$. 设 C 是 IS–代数 X 的包含 A 的任意理想, $\forall b\in B$, 由

$$b*\sum_{i=1}^{n}a_i=0\in C,\quad a_1,a_2,\cdots,a_n\in A\subseteq C$$

知 $b \in C$, 从而 $B \subseteq C$. 这说明 B 是 IS–代数 X 的包含 A 的最小理想, 故 $B = [A]$.

证毕

定理 4.2.6 设 X 是 IM–代数 (含幺元的 IS–代数), A 是 X 的非空子集, 则由 A 生成的理想为

$$[A] = \left\{ x \in X \,\middle|\, x * \sum_{i=1}^{n} x_i a_i y_i = 0, n \in \mathbf{N}^+,\ x_i, y_i \in X, a_i \in A, i = 1, 2, \cdots, n \right\}.$$

证明 设等式右端的集合为 C, X 中的幺元为 1.

首先, $\forall a \in A$, $a * 1a1 = a * a = 0$, 故 $a \in C$, 从而 $A \subseteq C$.

其次, 证明 C 是包含 A 的理想.

$\forall c \in C$, 则存在 $x_i, y_i \in X, a_i \in A$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 使得

$$c * \sum_{i=1}^{n} x_i a_i y_i = 0.$$

$\forall x \in X$, 用 x 左乘等式两端得

$$xc * \sum_{i=1}^{n} x x_i a_i y_i = 0,$$

所以 $xc \in C$. 同理可得 $cx \in C$, 所以 C 是半群 $(X, \cdot)$ 的理想.

设 $x * y \in C$, $y \in C$, 则存在 $x_i, y_i \in X, a_i \in A$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $u_j, v_j \in X, b_j \in A$, $j = 1, 2, \cdots, m$, 使得

$$(x * y) * \sum_{i=1}^{n} x_i a_i y_i = 0, \quad y * \sum_{j=1}^{m} u_j a_j v_j = 0,$$

从而

$$\left(x * \sum_{i=1}^{n} x_i a_i y_i \right) * y = (x * y) * \sum_{i=1}^{n} x_i a_i y_i = 0,$$

即

$$x * \sum_{i=1}^{n} x_i a y_i \leqslant y,$$

故

$$\left(x * \sum_{i=1}^{n} x_i a y_i \right) * \sum_{j=1}^{m} u_j a_j v_j \leqslant y * \sum_{j=1}^{m} u_j a_j v_j = 0 \in C,$$

从而 $x \in C$, 故 C 是 IS–代数 X 的理想.

最后, 设 I 是包含 A 的任意理想, $\forall c \in C$, 由 $c * \prod_{i=1}^{n} x_i a_i y_i = 0 \in I$ 及每个

$x_i a_i y_i \in I$ 可知 $c \in I$, 从而 $C \subseteq I$, 故 C 是包含 A 的最小理想.

综上可得 $[A] = C$. 证毕

定理 4.2.7 设 A, B 都是 IS–代数 X 的理想, 则有

$$[A \cup B] = \{x \in X \mid 存在\ a \in A, b \in B,\ 使得\ (x * a) * b = 0\}.$$

证明 设 $K = \{x \in X \mid 存在\ a \in A, b \in B,\ 使得\ (x * a) * b = 0\}$, 由定理 4.2.5 知 $K \subseteq [A \cup B]$. 下面证明 $[A \cup B] \subseteq K$.

任取 $x \in [A \cup B]$, 由定理 4.2.5 知, 存在 $q_1, q_2, \cdots, q_n \in A \cup B$, 使得

$$x * \sum_{i-1}^{n} q_i = 0.$$

由于上式中 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的次序可交换, 不妨设 $q_1, \cdots, q_k \in A, q_{k+1}, \cdots, q_n \in B$, 则有

$$\left(x * \sum_{i=1}^{k} q_i\right) * \sum_{j=k+1}^{n} q_j = 0.$$

(1) 如果 $k = n$, 即 $q_1, \cdots, q_n \in A$, 则由 A 是 X 的理想知 $x \in A$.

(2) 如果 $k = 0$, 即 $q_1, \cdots, q_n \in B$, 则由 B 是 X 的理想知 $x \in B$.

(3) 如果 $0 < k < n$, 令 $b = \left(x * \sum_{i=1}^{k} q_i\right)$, 则

$$b * \sum_{j=k+1}^{n} q_j = 0 \in B.$$

由于 $q_{k+1}, \cdots, q_n \in B$, B 为 X 的理想, 故 $b \in B$. 令 $a = x * b$, 则有

$$a * \sum_{i=1}^{k} q_i = (x * b) * \sum_{i=1}^{k} q_i = \left(x * \sum_{i=1}^{k} q_i\right) * b = b * b = 0.$$

但 $q_1, \cdots, q_k \in A$ 且 A 为 X 的理想, 故 $a \in A$, 即 $a = x * b \in A$, 从而

$$(x * a) * b = (x * b) * a = a * a = 0,$$

即 $x \in K$, 故得

$$[A \cup B] = \{x \in X \mid 存在\ a \in A, b \in B,\ 使得\ (x * a) * b = 0\}.$$ 证毕

4.2.3 闭理想

定义 4.2.4 设 C 是 IS–代数 X 的非空子集, 如果 C 既是 X 的理想, 又是 X 的子代数, 则称 C 为 X 的闭理想.

由定理 4.2.1 和定理 4.2.3 知, KP(X) 和 QP(X) 都是 X 的闭理想.

由于半群 $(X,\cdot)$ 的理想必为它的子半群, 故 IS–代数 X 的理想 A 是闭理想当且仅当 A 是 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的闭理想. 再由定理 2.4.7 直接得到如下推论:

推论 4.2.1 设 A 是 IS–代数 X 的理想, 则 A 为闭理想 $\Leftrightarrow \forall x\in A$ 有 $0*x\in A$.

由定理 2.4.8 直接得到如下推论:

推论 4.2.2 设 A 是 IS–代数 X 的非空子集, 并且 A 是半群 $(X,\cdot)$ 的理想, 则 A 是 IS–代数 X 的闭理想 $\Leftrightarrow \forall x,y\in X,\forall z\in A$, 由 $x*z,y*z\in A$ 可推出 $x*y\in A$.

设 A 是 IS–代数 X 的非空子集, 记

$$L(A)=\{0*(0*a)\,|a\in A\}.$$

$\forall x\in L(A)$, 存在 $a\in A$, 使得 $x=0*(0*a)\leqslant a\in A$, 从而 $x\in[A]$, 故 $L(A)\subseteq[A]$.

再由定理 2.4.9 直接得到如下推论:

推论 4.2.3 有限 IS–代数的每个理想都是闭理想.

定理 4.2.8 设 $(X,*,\cdot,0)$ 是 IS–代数, A 是半群 $(X,\cdot)$ 的理想, 如果 $\forall a\in A$ 必有 $0*a\in L(A)$, 则 $[A]$ 必为 X 的闭理想.

证明 $\forall x\in[A]$, 由定理 4.2.5 知, 存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$, 使得

$$x*\sum_{i=1}^{n}a_i=0,$$

故得

$$\begin{aligned}(0*x)*\sum_{i=1}^{n}(0*a_i)&=\left(\left(x*\sum_{i=1}^{n}a_i\right)*x\right)*\sum_{i=1}^{n}(0*a_i)\\&=\left(0*\sum_{i=1}^{n}a_i\right)*\sum_{i=1}^{n}(0*a_i)\\&=\left(((0*a_1)*(0*a_1))*\sum_{i=2}^{n}a_i\right)*\sum_{i=2}^{n}(0*a_i)\\&=\left(0*\sum_{i=2}^{n}a_i\right)*\sum_{i=2}^{n}(0*a_i)\\&=\cdots\\&=(0*a_n)*(0*a_n)=0.\end{aligned}$$

由于 $0*a_i\in L(A)\subseteq[A]$, 故 $0*x\in[A]$. 由推论 4.2.1 知, $[A]$ 为闭理想. 证毕

定理 4.2.9 设 A 是 IS–代数 X 的理想, 如果对任意 $a\in A$, 存在 $a'\in A,x\in X$, 使得 $a=a'x(a=xa')$, 则 A 为 X 的闭理想.

证明 $0*a=a'0*a'x=a'(0*x)$, 由于 $a'\in A$ 且 A 为 X 的理想, 故

$$0*a=a'(0*x)\in A.$$

由推论 4.2.1 知, A 为 X 的闭理想. 证毕

特别地, 在 IM–代数 X 中, $\forall a\in X$, $a=a1$, 故由定理 4.2.9 直接得到如下推论:

推论 4.2.4 IM-代数 X 中的每个理想都是闭理想.

4.2.4 a–理想

2001 年, Roh Eun Hwan 等引入了 IS–代数的 a–理想, 并讨论了它的性质.

定义 4.2.5 设 A 是 IS–代数 X 的非空子集, 如果

(1) A 是半群 $(X,\cdot)$ 的理想;

(2) $\forall x,y,z\in A$, 由 $(x*z)*(0*y)\in A$, $z\in A$ 可推出 $y*x\in A$,

则称 A 为 X 的 a–理想.

由于 IS–代数的 a–理想首先是半群 $(X,\cdot)$ 的理想, 取 $x\in A$, 则 $0=0x\in A$, 所以 a–理想必包含 0.

例 4.2.3 设 $X=\{0,a,b,c\}$.

$*$	0	a	b	c
0	0	0	b	b
a	a	0	c	b
b	b	b	0	0
c	c	b	a	0

$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
c	0	a	b	c

则 $(X,*,\cdot,0)$ 是 IS–代数, $A=\{0,a\}$ 是 X 的 a 理想, $B=\{0,b\}$ 是 X 的理想, 但不是 a–理想, 因为

$$(b*b)*(0*a)=0\in B,$$

但 $a*b=c\notin B$. 可见, a-理想与理想是两个不同的概念.

下面讨论 a–理想与理想和闭理想的关系.

定理 4.2.10 IS–代数 X 的 a-理想必为 X 的闭理想.

证明 设 A 是 X 的 a 理想, 并设 $x*z\in A$, $z\in A$, 则

$$(x*z)*(0*0)\in A.$$

由于 A 为 a–理想, 故 $0*x\in A$, 即

$$((0*x)*0)*(0*0)=0*x\in A,$$

故 $0*(0*x)\in A$, 即 $(0*0)*(0*x)\in A$, 从而 $x=x*0\in A$, 故 A 必是 X 的理想.

$\forall a\in A$, 由于 $0\in A$, 从而有

$$(a*0)*(0*0)=a\in A,$$

故得 $0*a\in A$. 由推论 4.2.1 知, A 为闭理想. 证毕

定理 4.2.11　设 A 是 IS–代数 X 的理想, $\forall x,y,z\in X$, 则以下命题等价:

(1) A 是 a–理想;

(2) 由 $(x*z)*(0*y)\in A$ 可以推出 $y*(x*z)\in A$;

(3) 由 $x*(0*y)\in A$ 可以推出 $y*x\in A$.

证明　(1)⇒(2)　设 $s=(x*z)*(0*y)\in A$, 则

$$((x*z)*s)*(0*y)=((x*z)*(0*y))*s=s*s=0\in A.$$

由于 A 是 a–理想, 故 $y*(x*z)\in A$.

(2)⇒(3)　取 $z=0$ 直接得到证明.

(3)⇒(1)　设 $(x*z)*(0*y)\in A$, $z\in A$, 则有 $y*(x*z)\in A$, 但

$$(x*(0*y))*((x*z)*(0*y))\leqslant x*(x*z)\leqslant z\in A,$$

并且 A 为 X 的理想, 故

$$(x*(0*y))*((x*z)*(0*y))\in A,$$

从而 $x*(0*y)\in A$. 由 (3) 得 $y*x\in A$.　　证毕

定理 4.2.12　AS–代数 X 中的每个理想都是 a–理想.

证明　设 A 是 X 的任一理想, 设 $x*(0*y)\in A$, 由于 X 是 AS–代数, 即 BCI–代数 $(X,*,0)$ 是结合的, 由定理 3.1.1 得

$$y*x=x*y=x*(0*y)\in A,$$

从而 A 是 a–理想.　　证毕

4.3　IS–代数中理想的分解

杨闻起通过引入 IS–代数的既约理想和次极大理想, 讨论了它们的性质, 并得到了把任意理想分解为既约理想和次极大理想的分解定理.

4.3.1　既约理想及其分解定理

定义 4.3.1　设 I 是 IS–代数 X 的理想, 如果对 X 的任意理想 A, B, 由 $I=A\cap B$ 可以推出 $I=A$ 或 $I=B$, 则称 I 为 X 的既约理想.

定理 4.3.1　设 I 是 IS–代数 X 的理想, 则 I 是 X 的既约理想当且仅当对 X 的任意有限个理想 $A_1,A_2,\cdots,A_n$. 如果 $I=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$, 则存在某个 A_i, 使得 $I=A_i$.

证明　⇐　显然成立.

⇒　当 $n=1,2$ 时, 显然成立. 假设对 $n-1$ 命题成立, 下设有 n 个理想 $A_1,A_2,\cdots,A_n$, 使得 $I=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$, 即

$$I=(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})\cap A_n.$$

令 $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}$, 由定理 4.2.3 知, A 也是 X 的理想且 $I = A \cap A_n$, 从而 $I = A$ 或 $I = A_n$. 如果 $I = A_n$, 则结论成立; 如果 $I = A$, 则由归纳假设知, 存在 $A_i(1 \leqslant i \leqslant n)$, 使得 $I = A_i$. 证毕

定理 4.3.2 设 X 是 IS-代数, 对 X 的真理想 A 和任意 $x \in X - A$, 必存在既约理想 I, 使得 $x \notin I \supseteq A$.

证明 令

$$\alpha = \{B | B \text{ 是 } X \text{ 的理想, 且 } x \notin B \supseteq A\}.$$

由于 $A \in \alpha$, 故 α 非空. 设 β 是 α 中关于 "$\subseteq$" 的任一链, 令

$$B_0 = \bigcup_{B \in \beta} B,$$

由定理 4.2.4 知, B_0 是 X 的理想, 且显然 $x \notin B_0 \supseteq A$, 从而 $B_0 \in \alpha$. 由 Zorn 引理知, α 中必有极大元, 设 I 为 α 中的极大元, 下面只需证明 I 是既约理想.

假设 $I = B_1 \cap B_2$, 其中 B_1, B_2 都是 X 的理想, 且 $B_1 \neq I, B_2 \neq I$, 则 B_1, B_2 真包含 I. 由 I 的极大性知 $B_1, B_2 \notin \alpha$, 从而 $x \in B_1$ 且 $x \in B_2$, 即 $x \in B_1 \cap B_2$, 故 $x \in I$, 这与 $I \in \alpha$ 矛盾, 所以 I 必是 X 的既约理想, 并且显然 $x \notin I \supseteq A$. 证毕

定理 4.3.3 IS-代数 X 的每个真理想都可表示为一些既约理想的交.

证明 设 A 是 X 的真理想, 任取 $x \in X - A$, 则由定理 4.3.2 知, 必存在既约理想 I_x, 使得 $x \notin I_x \supseteq A$, 令

$$I = \bigcap_{x \in X - A} I_x,$$

下面证明 $I = A$.

一方面, 由于 $\forall x \in X - A$, $I_x \supseteq A$, 从而

$$I = \bigcap_{x \in X - A} I_x \supseteq A.$$

另一方面, 对任意取定 $x_0 \in X - A$, 由于 $x_0 \notin I_{x_0}$, 所以

$$x_0 \in X - I_{x_0} \subseteq X - \bigcap_{x \in X - A} I_x = X - I,$$

从而 $X - A \subseteq X - I$, 故 $I \subseteq A$.

综上所述, $I = A$, 即 $A = \bigcap_{x \in X - A} I_x$, 并且 I_x 为既约理想. 证毕

定理 4.3.3 表明, 只要能得到 IS-代数 X 的全部既约理想, 就可通过作交来得到 X 的全部理想, 从而既约理想可认为是 X 的全部理想中最基本的成员.

还希望在定理 4.3.3 中, 当把任意一个理想表示为一些既约理想的交时, 既约理想的个数尽可能少一些.

定义 4.3.2 如果对 IS 代数 X 的任一理想升 (降) 链

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots (A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots)$$

均存在正整数 n, 使得当 $k \geqslant n$ 时均有 $A_k = A_n$, 则称 X 满足理想升 (降) 链条件. 将满足理想升 (降) 链条件的 IS–代数 X 叫做 Noether IS–代数 (Artin IS–代数).

定义 4.3.3　如果 IS–代数 X 中的每个非空理想之族均含有极大元 (极小元), 则称 X 满足理想极大 (小) 条件.

引理 4.3.1　IS 代数 X 满足理想升 (降) 链条件当且仅当 X 满足理想极大 (小) 条件.

证明　设 X 满足理想极小条件, 设

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$$

是 X 的任一理想降链, 则理想族 $\{A_i | i \geqslant 1\}$ 中必有极小元. 不妨设为 A_n, 于是当 $k \geqslant n$ 时, $A_k \supseteq A_n$, 但由于 $k \geqslant n$, 必有 $A_k \subseteq A_n$, 故 $A_k = A_n$.

反过来, 设 X 满足理想降链条件, 令 α 是 X 中任一非空理想族, 则存在 $A_0 \in \alpha$. 假设 α 中没有极小元, 则存在 $A_1 \in \alpha$, 使得 $A_0 \supsetneqq A_1$. 同样地, A_1 也不是 α 中的极小元, 则存在 $A_2 \in \alpha$, 使得 $A_1 \supsetneqq A_2$. 重复以上作法, 由于 α 中没有极小元, 便得到一个无限严格降链

$$A_0 \supsetneqq A_1 \supsetneqq A_2 \supsetneqq \cdots,$$

矛盾, 从而 α 中必有极小元.

同理可证升链条件与极大条件的等价性.　证毕

定理 4.3.4　Noether IS–代数 X 中的每个真理想均可表示为有限个既约理想的交.

证明　设 $\alpha = \{A | A$ 是 X 的理想, 并且 A 不能表示为有限个既约理想的交$\}$.

假设命题不真, 则 $\alpha \neq \varnothing$. 由引理 4.3.1 知, α 中必有极大元, 不妨设为 I. 由 $I \in \alpha$ 知, I 不是既约理想, 于是存在真包含 I 的两个理想 A_1, A_2, 使得 $I = A_1 \cap A_2$. 由于 I 是 α 中的极大元, 故 $A_1, A_2 \notin \alpha$, 所以 A_1, A_2 均可表示为有限个既约理想的交, 从而 $I = A_1 \cap A_2$ 也可表示为有限个既约理想的交, 这与 $I \in \alpha$ 矛盾, 从而命题成立. 证毕

定理 4.3.5　Artin IS 代数 X 中的每个真理想都可表示成有限个既约理想的交.

证明　假设存在 X 的一个真理想 A 不能表示成有限个既约理想的交, 取 $x_1 \in X - A$, 由定理 4.3.2 知, 必存在既约理想 I_{x_1}, 使得 $x_1 \notin I_{x_1} \supseteq A$. 令 $A_1 = I_{x_1}$, 即 $x_1 \notin A_1 \supseteq A$, 又由假设知 $A_1 \neq A$, 即 $A_1 \supsetneqq A$. 取 $x_2 \in A_1 - A$, 再由定理 4.3.2 知, 必存在既约理想 I_{x_2}, 使得 $x_2 \notin I_{x_2} \supseteq A$, 令 $A_2 = A_1 \cap I_{x_2}$. 又由假设知, $A_2 \supsetneqq A$, 并且由 $x_2 \notin I_{x_2}$, $x_2 \in A_1$ 知, $A_1 \supsetneqq A_2$. 重复以上作法, 由于 A 不是有限个既约理想的交, 从而得到一个无限严格降链

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots,$$

这与 X 是 Artin IS–代数矛盾.　证毕

4.3.2 次极大理想及其分解定理

下面引入比既约理想条件更强的一类理想.

定义 4.3.4 设 M 是 IS–代数 X 的真理想.

(1) 如果对 X 的任意理想 A, 由 $A \supseteq M$ 可推出 $A = M$ 或 $A = X$, 则称 M 为 X 的极大理想;

(2) 如果存在 $x \in X - M$, 使得对 X 的任意理想 A, 由 $x \notin A \supseteq M$ 可推出 $A = M$, 则称 M 为关于元素 x 的次极大理想, 记为 M_x, 有时也简称为次极大理想.

显然, X 的极大理想 M 必是关于 $X - M$ 中任一元素的次极大理想, 即次极大理想是极大理想的推广.

定理 4.3.6 对 IS–代数 X 中的任一真理想 A 及任意 $x \in X - A$, 必存在关于 x 的次极大理想 M_x, 使得 $x \notin M_x \supseteq A$.

证明 设 $\alpha = \{B | B$ 是 X 的理想且 $x \notin B \supseteq A\}$. 由于 $A \in \alpha$, 故 α 非空, 设 β 是 α 中的任一链, 令 $B_0 = \bigcup\limits_{B \in \beta} B$, 则由定理 4.2.4 知, B_0 也是 X 的理想, 并且显然 $x \notin B_0 \supseteq A$, 从而 $B_0 \in \alpha$. 由 Zorn 引理便知, α 中必有极大元, 该极大元就是满足条件的次极大理想. 证毕

定理 4.3.7 设 X 是 IM–代数, A 是 X 的真理想, $x \in X - A$, 则 A 是关于 x 的次极大理想当且仅当 $\forall y \in X - A$, 存在 $x_1, x_2, \cdots, x_k, y_1, y_2, \cdots, y_k \in X$, 使得

$$x * \sum_{i=1}^{k} x_i y y_i \in A.$$

证明 设 A 是关于 x 的次极大理想, $\forall y \in X - A$, 令 $A_1 = [A \cup \{y\}]$, 则 $A_1 \supsetneqq A$, 故 $x \in A_1$. 由定理 4.2.6 知, $\exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in A \cup \{y\}$ 及 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n \in X$, 使得

$$x * \sum_{i=1}^{n} x_i a_i y_i = 0.$$

但由于 $x \notin A$, 故 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全在 A 内, 不妨取

$$a_1, a_2, \cdots, a_k = y, a_{k+1}, \cdots, a_n \in A,$$

则有

$$\left(x * \sum_{i=1}^{k} x_i y y_i\right) * \sum_{j=k+1}^{n} x_j a_j y_j = 0 \in A.$$

由于每个 $a_j \in A$, 故 $x_j a_j y_j \in A$, $j = k+1, \cdots, n$, 所以有

$$x * \prod_{i=1}^{k} x_i y y_i \in A.$$

反过来, $\forall y \in X - A$, 设存在 $x_i, y_i \in X$, $i = 1, 2, \cdots, k$, 使得

$$x * \prod_{i=1}^{k} x_i y y_i \in A,$$

由于 $x \notin A$, 由定理 4.3.6 知, 必存在次极大理想 M_x, 使得 $x \notin M_x \supseteq A$. 假设 $M_x \supsetneqq A$, 则存在 $y \in M_x, y \notin A$, 便有

$$x * \sum_{i=1}^{k} x_i y y_i \in A \subseteq M_x,$$

于是

$$x * \sum_{i=1}^{k} x_i y y_i \in M_x.$$

由于 M_x 为 X 的理想, 并且 $y \in M_x$, 从而 $x_i y y_i \in M_x (i = 1, 2, \cdots, k)$, 故 $x \in M_x$, 矛盾, 所以 $A = M_x$, 即 A 为次极大理想. 证毕

与定理 4.3.3、定理 4.3.5、定理 4.3.6 类似地可以证明以下结论:

定理 4.3.8 IS 代数的每个真理想都可表示成一些次极大理想的交.

定理 4.3.9 Noether IS-代数 (Artin IS-代数) 中的每个真理想都可表示为有限个次极大理想的交.

最后, 通过下面的定理反映次极大理想与既约理想的关系.

定理 4.3.10 设 A 是 IS-代数 X 的真理想, 则 A 是次极大理想当且仅当对 X 的任意个理想 $A_i (i \in D)$, 只要 $A = \bigcap_{i \in D} A_i$, 就存在 $i_0 \in D$, 使得 $A = A_i$.

证明 设 A 是关于 x 的次极大理想, 且 $A = \bigcap_{i \in D} A_i$, 由于 $x \notin A$, 故存在 $i_0 \in D$, 使得 $x \notin A_{i_0} \supseteq A$, 但 A 为关于 x 的次极大理想, 故 $A = A_{i_0}$.

反过来, 由于 A 为 X 的真理想, 则由定理 4.3.8 知, A 可表示成一些次极大理想的交. 由已知, 必存在其中一个次极大理想等于 A, 从而 A 为次极大理想. 证毕

定理 4.3.10 和定理 4.3.1 表明, 次极大理想的条件比既约理想的条件强, 从而次极大理想必是既约理想.

当然, 由定理 4.3.10 知, 在 Artin IS-代数及 Noether IS-代数, 特别是有限 IS-代数中, 次极大理想与既约理想等价.

4.4 IS-同态与同构

所有代数结构都离不开同态与同构, IS-代数作为一种代数结构, 其同态和同构既有一般代数结构的共性, 也有自身的特点.

4.4.1 概念和基本性质

定义 4.4.1 设 $(X, *, \cdot, 0)$ 和 $(\overline{X}, \overline{*}, \bar{\cdot}, \overline{0})$ 是两个 IS-代数, f 是 X 到 $\overline{X}$ 的映射, $\forall x, y \in X$, 如果

$$f(x*y)=f(x)\bar{*}f(y),\quad f(x\cdot y)=f(x)\bar{\cdot}f(y),$$

则称 f 为 X 到 $\bar{X}$ 的 IS–同态映射, 将 X 到 $\bar{X}$ 的同态双射叫做 X 到 $\bar{X}$ 的 IS–同构映射. 如果存在 X 到 $\bar{X}$ 的 IS–同态满射 (同构映射), 则称 X 与 $\bar{X}$ 为 IS–同态 (IS–同构), 记为 $X\sim\bar{X}(X\cong\bar{X})$.

定理 4.4.1 如果 f 是 X 到 $\bar{X}$ 的 IS–同态映射, 则

(1) $f(0)=\bar{0}$;

(2) $\ker f=\left\{x\in X\,\middle|\,f(x)=\bar{0}\right\}$ 是 X 的闭理想, 称之为 f 的核.

证明 (1) $f(0)=f(0*0)=f(0)\bar{*}f(0)=\bar{0}$.

(2) 由定理 2.5.4 知, $\ker f$ 是 BCI–代数 X 的闭理想. $\forall x\in X,\forall a\in\ker f$, 由定理 4.1.2 知

$$f(xa)=f(x)f(a)=f(x)\bar{0}=\bar{0},$$

$$f(ax)=f(a)f(x)=\bar{0}f(x)=\bar{0},$$

从而 $xa,ax\in\ker f$, 故 $\ker f$ 是 IS–代数 X 的闭理想. 证毕

定理 4.4.2 设 f 是 X 到 $\overline{X}$ 的 IS–同态映射, $\overline{A}$ 是 $\overline{X}$ 的子代数 (理想、闭理想), 则 $A=f^{-1}(\overline{A})$ 也是 X 的子代数 (理想、闭理想).

证明 设 $\bar{A}$ 是 $\overline{X}$ 的子代数, 由定理 2.5.6 知, A 是 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的子代数, 且 $0\in A$.

$\forall a,b\in A$, 即 $f(a),f(b)\in\overline{A}$, 由于 $\overline{A}$ 为 $\overline{X}$ 的子代数, 则

$$f(ab)=f(a)f(b)\in\overline{A},$$

从而 $ab\in A$, 即说明 A 是半群 $(X,\cdot)$ 的子代数, 从而 A 是 IS–代数 X 的子代数.

设 $\overline{A}$ 是 $\overline{X}$ 的理想, 由定理 2.5.6 知, A 必是 BCI–代数 X 的理想.

$\forall x\in X,\forall a\in A$, 由于 $\overline{A}$ 为 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的理想, 从而

$$f(xa)=f(x)f(a)\in\overline{A},\quad f(ax)=f(a)f(x)\in\overline{A},$$

故 $xa,ax\in A$, 于是 A 是 IS–代数 X 的理想. 证毕

如果 $\overline{A}$ 是 $\overline{X}$ 的闭理想, 则 A 是 X 的子代数, 也是 X 的理想, 即 A 是 X 的闭理想.

定理 4.4.3 设 f 是 IS–代数 X 到 $\overline{X}$ 的同态满射, 如果 A 是 X 的子代数 (理想、闭理想), 则 $f(A)$ 是 $\overline{X}$ 的子代数 (理想、闭理想).

证明 设 A 是 X 的子代数, 由定理 2.5.7 知, $f(A)$ 必是 BCI–代数 $(\overline{X},\bar{*},0)$ 的子代数. $\forall a,b\in A$ 有 $f(a)f(b)=f(ab)\in A$, 故 $f(A)$ 是 IS–代数 X 的子代数.

设 A 是 X 的理想, 则 A 同时是 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的理想和半群 $(X,\cdot)$ 的理想. 由定理 2.5.7 知, $f(A)$ 必是 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的理想. $\forall\bar{x}\in\overline{X},\forall\bar{a}\in f(A)$, 由于 f 为

满射, 则存在 $x \in X, a \in A$, 使得 $\overline{x} = f(x), \overline{a} = f(a)$. 由于 A 是半群 $(X, \cdot)$ 的理想, 故 $xa, ax \in A$, 从而

$$\overline{x}\,\overline{a} = f(x)f(a) = f(xa) \in f(A),$$

$$\overline{a}\,\overline{x} = f(a)f(x) = f(ax) \in f(A),$$

故 $f(A)$ 是 IS–代数 X 的理想.

设 A 是 IS–代数 X 的闭理想, 则由上面的结论知, $f(A)$ 必是 IS–代数 X 的子代数和理想, 从而是 X 的闭理想. 证毕

4.4.2 积代数、商代数和同态基本定理

定理 4.4.4 设 $(X_i, *_i, \cdot_i, 0_i)(i \in D)$ 是一族 IS–代数, 令

$$X = \prod_{i \in D} X_i,$$

$\forall f, g \in X$, 规定

$$(f * g)(i) = f(i) *_i g(i), \quad \forall i \in D,$$

$$(fg)(i) = f(i) \cdot_i g(i), \quad \forall i \in D,$$

$$0(i) = 0_i, \quad \forall i \in D.$$

容易验证, $(X, *, \cdot, 0)$ 是一族 IS–代数 $(X_i, *_i, \cdot_i, 0_i)$ 的积代数, 并且 $\forall i \in D$, $\varphi : X \to X_i$, $f \to f(i)$ 是 X 到 X_i 的同态满射.

证明 显然, φ 是 X 到 X_i 的满射. $\forall f, g \in X$ 有

$$\varphi(f * g) = (f * g)(i) = f(i) * g(i) = \varphi(f) * \varphi(g),$$

$$\varphi(fg) = (fg)(i) = f(i)g(i) = \varphi(f)\varphi(g),$$

故 φ 为 X 到 X_i 的同态满射. 证毕

定义 4.4.2 设 A 是 IS–代数 $(X, *, \cdot, 0)$ 的理想, 规定

$$x \sim y \Leftrightarrow x * y, y * x \in A.$$

容易验证, “$\sim$” 为 X 上的等价关系, 称为关于理想 A 的同余关系, 记为

$$x \equiv y(\mathrm{mod} A).$$

$\forall x \in X$, 将该关系决定的同余类记为

$$x * A = \{y \in X \,|y * x, x * y \in A\}.$$

定理 4.4.5 设 A 是 IS–代数 $(X, *, \cdot, 0)$ 的理想, 令

$$X/A = \{x * A \,|x \in X\}.$$

规定

$$(x*A)*(y*A)=(x*y)*A, \quad (x*A)(y*A)=xy*A,$$

则 $(X/A,*,\cdot,0*A)$ 是 IS–代数, 称为 X 关于理想 A 的商代数.

证明 首先, 证明以上定义的 $*$ 和 $\cdot$ 运算是良好的. 由 2.5 节的讨论知, 以上定义的运算 $*$ 是良好的. 设

$$x*A=u*A, \quad y*A=v*A,$$

即 $x*u, u*x, y*v, v*y\in A$, 则有

$$xy*uy=(x*u)y\in A, \quad uy*xy=(u*x)y\in A,$$

故 $xy*A=uy*A$. 同理得 $uy*A=uv*A$, 故 $xy*A=uv*A$, 即

$$(x*A)(y*A)=(u*A)(v*A).$$

其次, 证明 $(X/A,*,\cdot,0*A)$ 是 IS–代数. 由定理 2.5.1 知, $(X/A,*,0*A)$ 是 BCI–代数, 任取 $x*A, y*A, z*A\in X/A$, 则有

$$\begin{aligned}(x*A)(y*A)(z*A)&=(xy)z*A=x(yz)*A\\&=(x*A)((y*A)(z*A)),\end{aligned}$$

故 $(X/A,\cdot)$ 是半群.

$$\begin{aligned}((x*A)*(y*A))(z*A)&=((x*y)*A)(z*A)=(x*y)z*A\\&=(xz*yz)*A=(xz*A)*(yz*A)\\&=(x*A)(z*A)*(y*A)(z*A).\end{aligned}$$

同理,

$$(z*A)((x*A)*(y*A))=(z*A)(x*A)*(z*A)(y*A),$$

故 $(X/A,*,\cdot,0*A)$ 是 IS–代数. 证毕

定理 4.4.6 设 A 是 IS–代数 X 的理想, 如果 X 是 KS–代数 (AS–代数、PS–代数、QS–代数), 则商代数 X/A 也是 KS 代数 (AS–代数、PS–代数、QS 代数).

证明 设 X 是 KS–代数, $\forall x\in X$ 有 $0*x=0$, 从而有

$$(0*A)*(x*A)=(0*x)*A=0*A,$$

于是 X/A 是 KS–代数. 其他同理可证. 证毕

定理 4.4.7 设 A 是 IS–代数 X 的理想, 则 $X\sim X/A$, 同态满射为 $\pi: x\to x*A$, 称 π 为正则同态.

证明 显然, π 为满射, $\forall x,y\in X$ 有

$$\pi(x*y)=(x*y)*A=(x*A)*(y*A)=\pi(x)*\pi(y),$$

$$\pi(xy)=xy*A=(x*A)(y*A)=\pi(x)\pi(y),$$

故 π 为 X 到 X/A 的满同态. 证毕

定理 4.4.8 设 f 是 IS–代数 X 到 $\overline{X}$ 的同态满射, 则

$$K=\ker f=\{x\in X\,|\,f(x)=\overline{0}\}$$

是 X 的理想, 并且 $X/K\cong\overline{X}$.

证明 显然, $K=f^{-1}(\overline{0})$, 由于 $\{\overline{0}\}$ 是 $\overline{X}$ 的理想, f 为同态满射, 则由定理 4.4.2 知, K 必为 X 的理想. 令

$$\varphi: X/K\to\overline{X},\quad x*A\to f(x),$$

由定理 2.5.9 的证明过程知, φ 为 X/K 到 $\overline{X}$ 的 BCI- 同构映射.

$\forall x*A, y*A\in X/K$ 有

$$\begin{aligned}\varphi((x*A)(y*A))&=\varphi(xy*A)=f(xy)\\&=f(x)f(y)=\varphi(x*A)\varphi(y*A),\end{aligned}$$

从而 φ 是 X/K 到 $\overline{X}$ 的同构映射. 证毕

4.5 IS–代数中的中国剩余定理

在 1.4 节中已经介绍了环论中的中国剩余定理. 2001 年, 辛小龙将它推广到 IS–代数上来.

首先, 在 IS–代数中引入理想的和与积.

定义 4.5.1 设 X 是 IS–代数, $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是 X 的理想, 则称由并集 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 生成的理想 $\left[\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right]$ 为理想 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和, 记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$.

令

$$Y=\{a_1a_2\cdots a_n\,|a_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n\},$$

将 Y 生成的理想叫做 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积, 记为 $A_1A_2\cdots A_n$.

显然, 以上加法和乘法满足结合律和交换律.

4.4 节还给出了 IS–代数中理想同余的概念: 设 A 是 IS–代数 X 的理想, 对任意 $x,y\in X$, x 和 y 关于理想 A 同余, 是指 $x*y\in A$ 和 $y*x\in A$ 同时成立. 这时, 记 $x\equiv y(\mathrm{mod}A)$. 定义 4.4.2 说明, 以上同余是 X 上的等价关系.

为了建立 IS–代数中的中国剩余定理, 先给出以下定理:

定理 4.5.1 设 X 是 IS–代数, A, B, C 是 X 的理想, 则有

$$(A+B)(A+C) \subseteq A+(B\cap C).$$

证明 设 $x \in (A+B)(A+C)$, 由定理 4.2.5 知, 存在 $m_i \in A+B$, $n_i \in A+C$, 使得

$$x * \sum_{i=1}^{n} m_i n_i = 0.$$

由于 $A+B, A+C$ 是 X 的理想, 并且 $m_i \in A+B, n_i \in A+C$, 则由定理 4.2.7 知, 存在 $a_i, a_i' \in A$, $b_i \in B$, $c_i \in C$, 使得

$$(m_i * a_i) * b_i = 0, (n_i * a_i') * c_i = 0,$$

从而 $m_i * a_i \in B$, $n_i * a_i' \in C$. 注意到 B, C 是 X 的理想, 则有

$$(m_i * a_i)(n_i * a_i') \in B\cap C,$$

即

$$(m_i * a_i)(n_i * a_i') = (m_i n_i * m_i a_i') * a_i(n_i * a_i') \in B\cap C.$$

但是, $m_i a_i', a_i(n_i * a_i') \in A$, 故有

$$m_i n_i \in A+(B\cap C), \quad i=1,2,\cdots,n$$

成立, 从而 $x \in A+(B\cap C)$. 证毕

现在给出本节的主要结果.

定理 4.5.2(IS–代数中的中国剩余定理) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 IS 代数 X 的理想, 并且满足

(1) $X^2 + A_i = X$, $i=1,2,\cdots,n$;

(2) $A_i + A_j = X, i,j=1,2,\cdots,n, i\neq j$,

则对任意 $b_1, b_2, \cdots, b_n \in X$, 一定存在 $b \in X$, 使得

$$b \equiv b_i (\mathrm{mod} A_i), \quad i=1,2,\cdots,n,$$

从而在以理想 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 为模同余的意义下, b 是被唯一确定的.

证明 由于 $A_1+A_2=X, A_1+A_3=X$, 则由定理 4.5.1 得

$$X^2 = (A_1+A_2)(A_1+A_3) \subseteq A_1+(A_2\cap A_3).$$

又由题设 $X = A_1 + X^2$, 从而有

$$X = A_1 + X^2 \subseteq A_1 + (A_1 + (A_2\cap A_3)) = A_1 + (A_2\cap A_3) \subseteq X,$$

所以有

$$X = A_1 + (A_2\cap A_3).$$

为了应用归纳法, 假定

$$X = A_1 + (A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k-1}),$$

由定理 4.5.1 得

$$X^2 = (A_1 + (A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k-1}))(A_1 + A_k) \subseteq A_1 + (A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k),$$

从而

$$X = X^2 + A_1 \subseteq A_1 + (A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k) \subseteq X,$$

于是有

$$X = A_1 + (A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k).$$

由归纳法原理有

$$X = A_1 + (A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) = A_1 + \bigcap_{i \neq 1} A_i.$$

类似地, 可以证明, 对 $k = 1, 2, \cdots, n$ 有

$$X = A_k + \bigcap_{i \neq k} A_i.$$

由以上论断可以推出, 对每一个 k, 都存在元素 $a_k \in A_k$ 和 $r_k \in \bigcap\limits_{i \neq k} A_i$, 使得

$$b_k = a_k + r_k,$$

从而对 $i \neq k$ 有

$$r_k \equiv b_k (\operatorname{mod} A_k), \quad r_k \equiv 0 (\operatorname{mod} A_i).$$

令 $b = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$, 则对每一个 $i = 1, 2, \cdots, n$, 都有

$$b = r_1 + r_2 + \cdots + r_n \equiv b_i (\operatorname{mod} A_i).$$

最后证明唯一性. 设 $c \in X$ 也满足

$$c \equiv b_i (\operatorname{mod} A_i)(i = 1, 2, \cdots, n),$$

则

$$b \equiv c (\operatorname{mod} A_i)(i = 1, 2, \cdots, n).$$

因此, 对每一个 $i = 1, 2, \cdots, n, b * c \in A_i$ 且 $c * b \in A_i$, 从而 $b * c, c * b \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, 这表明

$$b \equiv c \left(\operatorname{mod} \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right).$$

证毕

在定理 4.5.2 中, 如果 X 有恒等元, 则 $X^2 = X$, 从而 $X^2 + A_i = X$ 对每一个理想 A_i 都成立, 从而定理 4.5.2 的条件减少为一个, 即

$$A_i + A_j = X, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n, \quad i \neq j.$$

推论 4.5.1 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是环 R 的理想并适合 $R^2+A_i=R$ 和 $A_i+A_j=R$, 其中 $i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2,\cdots,n$ 且 $i\neq j$. 如果 $b_1,b_2,\cdots,b_n\in R$, 则存在 $b\in R$, 使得 $b\equiv b_i(\bmod A_i)$, $i=1,2,\cdots,n$.

进一步, 以理想 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 为模的同余意义下, b 是被唯一确定的.

证明 在环 R 上, 定义运算 "$*$" 如下: $a*b=a-b, a,b\in R$. 由定理 4.1.1 知, $(R,*,\cdot,0)$ 是一个 IS–代数, 从而定理 4.5.2 的条件全部满足, 于是由定理 4.5.2 的结论, 可找到一个 $b\in R$, 使得

$$b\equiv b_i(\bmod A_i),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

并且以理想 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 为模, b 是被唯一确定的. 证毕

在以上论述中, 将 A_i 看成环 R 中的理想也成立.

推论 4.5.2 给定正整数 $m_1,m_2,\cdots,m_n$, 其中当 $i\neq j$ 时, $(m_i,m_j)=1$, 则对任意整数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$, 同余方程组

$$\begin{aligned}
x&\equiv b_1(\bmod m_1),\\
x&\equiv b_2(\bmod m_2),\\
&\cdots\cdots\\
x&\equiv b_n(\bmod m_n)
\end{aligned}$$

有解且在模 $m=m_1m_2\cdots m_n$ 下, 这个解是唯一的.

证明 考虑 $R=\mathbf{Z}$, 其中 $\mathbf{Z}$ 表示整数集合. 已经知道, $(\mathbf{Z},+,\cdot)$ 形成一个环, 其中 "$+$" 和 "$\cdot$" 表示通常整数的加法和乘法. 设 $A_i=(m_i)=\{sm_i|s\in\mathbf{Z}\}$, 则容易验证, A_i 是环 R 的理想, 其中 $i=1,2,\cdots,n$. 应用推论 4.5.1 可推出要证的结论. 证毕

由以上推论可以看出, IS–代数中的中国剩余定理是初等数论和环论中的中国剩余定理的推广.

第 5 章　IS–代数与半环

BCI–半群 (IS–代数) 是在 BCI–代数的基础上通过添加半群结构而形成的逻辑代数, 它又是环的概念的一般化, 所以它与环和半环之间有着紧密的联系. 本章先讨论几种与环和半环有直接联系的 IS–代数, 再在任意 IS–代数中建立 AS–部分、PS–部分和 QS–部分, 以刻画 IS–代数与环和半环的接近程度; 还借助于环的特征理论, 建立了 IS–代数的特征的概念, 给出了 IS–代数的特征与环的特征之间的关系, 并用特征刻画了无零因子 IS–代数、KS–代数、AS–代数和 QS–代数. 最后, 通过给出一般 IS–代数的伴侣半环和伴随半环, 以此研究一般 IS–代数与环和半环的关系.

5.1　AS–代数、PS–代数、QS–代数与环和半环的关系

本节讨论三类 IS–代数: AS–代数、PS–代数、QS–代数, 通过论证它们与环和半环的关系, 说明这三类 IS–代数的重要性.

5.1.1　AS–代数与环

定义 5.1.1　设 $(X,*,\cdot,0)$ 是 IS–代数, 如果 BCI–代数 $(X,*,0)$ 是结合的, 则称 $(X,*,\cdot,0)$ 为 AS–代数.

定理 5.1.1　如果 $(X,*,\cdot,0)$ 是 AS–代数, 则 $(X,*,\cdot,0)$ 是特征为 2 的环. 反过来, 如果 $(R,+,\cdot)$ 是特征为 2 的环, 则 $(R,+,\cdot,0)$ 是 AS–代数.

证明　设 $(X,*,\cdot,0)$ 是 AS–代数, 由定理 3.1.6 知, $(X,*,0)$ 是以 0 为恒等元的对合群, 且 $x*y=y*x$, 故 $(X,*,\cdot,0)$ 必是环. 又由于 $x*x=0$, 故该环的特征为 2.

设 $(R,+,\cdot,0)$ 是特征为 2 的环, 由定理 4.1.1 知, $(R,-,\cdot,0)$ 是 IS–代数. 由于环 R 的特征为 2, 故对任意 $x\in R, x+x=0$, 即 $-x=x$, 于是 $x-y=x+y$, 从而环 R 中加法与减法一致, 所以, $(R,+,\cdot,0)$ 必是 IS–代数, 并且 $(R,+,0)$ 显然是结合 BCI–代数, 从而 $(R,+,\cdot,0)$ 是 AS–代数.　证毕

定理 5.1.1 说明, AS–代数与环有紧密的联系. 不仅如此, AS–代数与环的理想之间还有以下结论:

定理 5.1.2　设 R 是特征为 2 的环, 将 R 看成环与看成 IS–代数, 其理想是一致的.

证明　设 I 是环 R 的理想, 任取 $x,y\in R$, 并且 $x+y\in I, y\in I$, 则

$$x=(x+y)-y\in I,$$

从而 I 必是 IS–代数 R 的理想. 反过来, 设 I 是 IS–代数 R 的理想, 任取 $x,y\in R$, 由于 $x=(x+y)-y\in I$ 且 $y\in I$, 从而 $x-y=x+y\in I$, 所以 I 必是环 R 的理想. 证毕

5.1.2 PS–代数与环

定义 5.1.2 设 $(X,*,\cdot,0)$ 是 IS–代数, 如果 BCI–代数 $(X,*,0)$ 是广义结合的, 则称 $(X,*,\cdot,0)$ 为 PS–代数.

定理 5.1.3 如果 $(X,*,\cdot,0)$ 为 PS–代数, 令

$$x+y=x*(0*y), \tag{5.1.1}$$

则 $(X,+,\cdot)$ 是环, 并且 0 为零元, $0*x$ 为 x 的负元. 反过来, 如果 $(R,+,\cdot)$ 是环, 则 $(R,-,\cdot,0)$ 是 PS–代数.

证明 由定理 3.2.8 知, $(X,+)$ 是以 0 为零元的 Abel 群, 并且 $0*x$ 为 x 的负元, 故 $(X,+)$ 是 Abel 群. 显然, $(X,\cdot)$ 是半群, 又由定理 4.1.2 得

$$x(y+z)=x(y*(0*z))=xy*(x0*xz)=xy+xz.$$

同理可得

$$(x+y)z=xz+yz,$$

所以, $(R,+,\cdot,0)$ 是环.

反过来, 若 $(R,+,\cdot,0)$ 是环, 则容易验证 $(R,-,\cdot,0)$ 是 IS–代数. 由于 $0-(0-x)=x$, 故 $(R,-,\cdot,0)$ 是 PS–代数. 证毕

定理 5.1.4 如果 $(X,*,\cdot,0)$ 为 PS–代数, 并且按 (5.1.1) 生成的环是 $(X,+,\cdot)$, 则环 $(X,+,\cdot)$ 的理想必是 PS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 的理想.

证明 设 I 是环 $(X,+,\cdot)$ 的理想, 设 $x*y\in I, y\in I$, 则 $y+(x*y)\in I$, 由定理 3.2.3 得

$$x=y*(y*x)=y*(0*(x*y))=y+(x*y)\in I,$$

所以 I 是 PS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 的理想. 证毕

5.1.3 QS–代数与半环

定义 5.1.3 设 $(X,*,\cdot,0)$ 是 IS–代数, 如果 BCI–代数 $(X,*,0)$ 是拟结合的, 则称 $(X,*,\cdot,0)$ 为 QS–代数.

定理 5.1.5 在 QS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 中, 令

$$x+y=0*(x*y), \tag{5.1.2}$$

则 $(X,+,\cdot)$ 是加法交换半环.

证明 由定理 3.3.9 知, $(X,+)$ 是交换半群. 显然, $(X,\cdot)$ 是半群. 又由定理 4.1.2 知

$$x(y+z)=x(0*(y*z))=x0*(xy*xz)=0*(xy*xz)=xy+xz.$$

同理得

$$(x+y)z=xz+yz,$$

故 $(X,+,\cdot)$ 是加法交换半环.　　　　证毕

定理 5.1.6　在 QS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 中, $(X,+,\cdot)$ 是按 (5.1.2) 生成的半环, 则 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 的理想必是半环 $(X,+,\cdot)$ 的理想.

证明　设 I 是 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 的理想, 任取 $x,y\in I$, 由于 I 也是 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的理想, 故由定理 3.3.1 得

$$(0*y)*y=0*(y*y)=0*0=0\in I,$$

从而 $0*y\in I$, 由定理 3.3.1 得

$$\begin{aligned}(x+y)*x&=(0*(x*y))*x=0*((x*y)*x)\\&=0*((x*x)*y)=0*(0*y)=0*y\in I.\end{aligned}$$

由于 $x\in I$, 故 $x+y\in I$, 从而 I 是半环 $(X,+,\cdot)$ 的理想.　　　　证毕

5.2　AS–部分、PS 部分和 QS–部分

本节引入 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 的 AS–部分、PS 部分和 QS–部分, 证明它们都是 X 的子代数, AS–部分、PS 部分、QS–部分分别生成环和半环, 并给出了它们成为理想的几个等价条件.

5.2.1　IS–代数的 AS–部分

设 $(X,*,\cdot,0)$ 是 IS–代数, 在 4.1 节中记

$$\mathrm{AP}(X)=\{x\in X\,|0*x=x\}.$$

下面给出 $\mathrm{AP}(X)$ 的一个性质.

定理 5.2.1　设 $(X,*,\cdot,0)$ 是 IS–代数, 则 $\mathrm{AP}(X)$ 是 X 中的子代数和特征为 2 的环, 并且是 X 中关于运算 “$*$”, “$\cdot$” 的最大环.

证明　任取 $x,y\in\mathrm{AP}(X)$, 则有

$$0*(x*y)=(0*x)*(0*y)=x*y,$$

$$0*(xy)=(0y)*(xy)=(0*x)y=xy,$$

所以 $x*y,xy\in\mathrm{AP}(X)$, 从而 $\mathrm{AP}(X)$ 是 X 的子代数. $\mathrm{AP}(X)$ 也是 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的结合部分, 所以 $(\mathrm{AP}(X),*,0)$ 必是结合 BCI–代数, 从而 $(\mathrm{AP}(X),*,\cdot,0)$ 是 AS–代数. 由定理 5.1.1 知, $(\mathrm{AP}(X),*,\cdot,0)$ 是特征为 2 的环.

设 Y 是 X 中关于运算 "$*$", "$\cdot$" 的任意环, 任取 $y \in Y$, 由于 $0 * y = y * 0 = y$, 所以 $y \in$AP(X), 于是 $Y \subseteq$AP(X). 证毕

定义 5.2.1 设 $(X, *, \cdot, 0)$ 是 IS–代数, 将

$$\mathrm{AP}(X) = \{x \in X | 0 * x = x\}$$

称为 X 的 AS–部分.

由定义 5.2.1 显然可知, IS–代数 $(X, *, \cdot, 0)$ 是 AS–代数当且仅当 $\mathrm{AP}(X) = X$. 又由定理 4.1.4 知, AP(X) 必是半群 $(X, \cdot)$ 的理想. 但是, 一般地, AP(X) 未必是 IS–代数的理想.

例 5.2.1 设 $X = \{0, a, b\}$, 规定 $xy = 0$,

$*$	0	a	b
0	0	0	b
a	a	0	b
b	b	b	0

则 $(X, *, \cdot, 0)$ 是 IS–代数, 并且 $AP(X) = \{0, b\}$, 但是由于

$$a * b = b \in \mathrm{AP}(X), \quad a \notin \mathrm{AP}(X),$$

故 AP(X) 不是 X 的理想. 下面讨论 AP(X) 成为理想的条件.

定理 5.2.2 AP(X) 是 IS–代数 $(X, *, \cdot, 0)$ 的理想当且仅当 AP(X) 是 BCI–代数 $(X, *, 0)$ 的理想.

证明 必要性显然, 下面证明充分性. 设 AP(X) 是 BCI–代数 $(X, *, 0)$ 的理想, 又由定理 4.1.4 知, AP(X) 必是半群 $(X, \cdot)$ 的理想, 所以 AP(X) 是 IS–代数 X 的理想. 证毕

由定理 5.2.2 和定理 3.1.10 可直接得到如下推论:

推论 5.2.1 设 AP(X) 是 IS–代数 $(X, *, \cdot, 0)$ 的 AS–部分, 则 AP(X) 是 X 的理想当且仅当 $\forall x, y \in X, \forall a \in \mathrm{AP}(X)$, 由 $x * a = y * a$ 可推出 $x = y$.

5.2.2 IS–代数中的 PS–部分

设 $(X, *, \cdot, 0)$ 是 IS 代数, 在 4.1 节中记

$$\mathrm{SP}(X) = \{x \in X \,| 0 * (0 * x) = x\}.$$

下面给出 SP(X) 的一个性质.

定理 5.2.3 在 IS–代数 $(X, *, \cdot, 0)$ 中有

(1) SP(X) 是 $(X, *, \cdot, 0)$ 的子代数, 并且 $(\mathrm{SP}(X), *, \cdot, 0)$ 是 PS–代数;

(2) 在 SP(X) 中, 定义

$$x+y=x*(0*y),$$

则 SP(X) 是 $(X,*,\cdot,0)$ 中关于 “+”, “·” 的最大环.

证明 (1) $\forall x,y\in$SP(X) 有

$$0*(0*(x*y))=(0*(0*x))*(0*(0*y))=x*y,$$
$$0*(0*xy)=(0y)*((0y)*(xy))=(0*(0*x))y=xy,$$

即 $x*y,xy\in$SP(X), 所以 SP(X) 是 $(X,*,\cdot,0)$ 中的子代数. 显然, (SP(X), $*,\cdot,0$) 是 PS–代数.

(2) 由 (1) 知, (SP(X), $*,0$) 是 BCI–代数, 必为广义结合的, 故 $(X,*,\cdot,0)$ 为 PS–代数. 由定理 5.1.3 知, $(SP(X),+,\cdot)$ 是环.

设 $(Y,+,\cdot)$ 是 X 中的任一环, 任取 $y\in Y$, $0+y=y+0=y*(0*0)=y$, 即 $0*(0*y)=y$, 于是 $y\in$SP(X), 即得 $Y\subseteq$SP(X). 证毕

定义 5.2.2 在 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 中, 将

$$\mathrm{SP}(X)=\{x\in X|0*(0*x)=x\}$$

叫做 X 的 PS–部分.

例 5.2.2 设 $X=\{0,a,b,c\}$, 乘法为 $xy=0$, 运算 “$*$” 规定为

$*$	0	a	b	c
0	0	c	0	a
a	a	0	a	c
b	b	c	0	a
c	c	0	c	a

则 $(X,*,\cdot,0)$ 是 IS–代数, 并且 AP(X) $=\{0\}$, SP(X) $=\{0,a,c\}$.

在 IS–代数 X 中, 任取 $x,y\in$SP(X), 令 $x+y=x*(0*y)$, 则

$$\begin{aligned}0*(0*(x+y))&=0*(0*(x*(0*y)))\\&=(0*(0*x))*(0*(0*(0*y)))\\&=x*(0*y)=x+y,\end{aligned}$$

从而 $x,y\in$ SP(X), 所以这个加法也可作为 SP(X) 上的二元运算.

下面讨论 AP(X) 成为理想的条件.

首先, 与定理 5.2.2 同理可得如下定理:

定理 5.2.4 SP(X) 是 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 的理想当且仅当 SP(X) 是 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的理想.

5.2.3 IS–代数中的 QS–部分

设 $(X,*,\cdot,0)$ 是 IS–代数, 在 4.1 节中记

$$\mathrm{QP}(X)=\{x\in X\,|0*(0*x)=0*x\}.$$

下面给出 QP(X) 的一个性质.

定理 5.2.5 在 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 中有

(1) QP(X) 是 $(X,*,\cdot,0)$ 的子代数;

(2) 在 QP(X) 中, 定义

$$x+y=0*(x*y),$$

则 QP(X) 是 $(X,*,\cdot,0)$ 中关于 "+" 的最大交换半环.

证明 (1) $\forall x,y\in$QP(X) 有

$$\begin{aligned}0*(0*(x*y))&=(0*(0*x))*(0*(0*y))=(0*x)*(0*y)\\&=0*(x*y),\\0*(0*(xy))&=(0y)*((0y)*(xy))=(0*(0*x))y=(0*x)y\\&=0y*xy=0*xy,\end{aligned}$$

即 $x*y,xy\in$QP(X), 所以 QP(X) 是 $(X,*,\cdot,0)$ 中的子代数.

(2) 由 (1) 知, $(\mathrm{QP}(X),*,0)$ 是 BCI–代数, 必为拟结合的, 故 $(X,*,\cdot,0)$ 为 QS–代数. 由定理 5.1.5 知, $(\mathrm{QP}(X),+,\cdot)$ 是加法交换半环.

设 $(Y,+,\cdot)$ 是 X 中的任一加法交换半环, 任取 $y\in Y$, 有

$$0+y=y+0=0*(y*0)=0*y,$$

即 $0*(0*y)=0*y$, 于是 $y\in$QP(X), 即得 $Y\subseteq$QP(X). 证毕

定义 5.2.3 在 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 中, 将

$$\mathrm{QP}(X)=\{x\in X|\,0*(0*x)=0*x\}$$

叫做 X 的 QS–部分.

例 5.2.3 $X=\{0,a,b,c\}$, 乘法为 $x\cdot y=0$,

$*$	0	a	b	c
0	0	c	0	a
a	a	0	a	c
b	b	c	0	a
c	c	0	c	a

则 $(X,*,\cdot,0)$ 是 IS–代数, 并且有

$$\mathrm{AP}(X)=\{0\},\quad \mathrm{SP}(X)=\{0,a,c\},\quad \mathrm{QP}(X)=\{0,b\}.$$

在 IS–代数 X 中, 令

$$x+y=0*(x*y),$$

任取 $x,y\in \mathrm{QP}(X)$, 则

$$0*(0*(x+y))=0*(0*(0*(x*y)))=0*(x*y),$$

$$0*(x+y)=0*(0*(x*y))=(0*(0*x))*(0*(0*y))=(0*x)*(0*y)=0*(x*y),$$

从而 $x+y\in \mathrm{QP}(X)$, 所以这个加法也可作为 $\mathrm{QP}(X)$ 上的运算.

定理 5.2.6　$\mathrm{QP}(X)$ 是 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 的闭理想.

证明　由定理 3.3.14 知, $\mathrm{QP}(X)$ 是 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的闭理想. 又由定理 4.1.4 知, $\mathrm{QP}(X)$ 是半群 $(X,\cdot)$ 的理想, 故 $\mathrm{QP}(X)$ 是 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 的闭理想.　证毕

5.3　IS–代数的特征

本节引入 IS–代数的特征的概念, 讨论它的性质, 给出了 IS–代数的特征与环的特征之间的关系, 并用特征刻画了无零因子 IS–代数、KS–代数、AS–代数和 QS–代数.

5.3.1　概念与基本性质

为了把 IS–代数与环和半环联系起来, 把 2.1 节中 $a*x^n$ 记为 $a*nx$, 则 2.1 节中的公式可表示为

(1) $(x*ny)*mz=(x*mz)*ny$;

(2) $0*(0*nx)=0*n(0*x)$;

(3) $0*n(x*y)=(0*nx)*(0*ny)$;

(4) $(0*mx)*(0*nx)=0*(m-n)x,\ m\geqslant n$;

(5) $0*m(0*nx)=0*(0*(mn)x)$;

(6) $x*(x*n(x*y))=x*ny$.

定义 2.3.1 可表述如下: 在 BCI–代数 X 中, $x\in X$, 将满足

$$0*nx=0$$

的最小正整数 n 叫做元素 x 的阶, 记为 $|x|$. 如果对任意正整数 n 都有

$$0*nx\neq 0,$$

则称 x 的阶为无穷大.

定理 2.3.4 可表述如下: 在 BCI–代数 X 中, 如果 $|x|=n$, 则

$$0*nx=0\Leftrightarrow n\,|m\ .$$

定理 2.3.5 可表述如下: 在 BCI–代数 X 中, $\forall x,y\in X$, 则有

$$|x*y|\,|n\Leftrightarrow 0*nx=0*ny\ .$$

已经知道, 环中有元素的阶的概念, 并把所有非零元素的最大阶叫做环的特征, 环的特征能很好地刻画环本身. 2.3 节中也给出了 BCI–代数中元素的阶, 自然希望把环的特征理论移植到 IS 代数上来.

定义 5.3.1 在 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 中, 将元素 x 关于 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的阶叫做元素 x 的阶, 将 X 中所有元素的最大阶叫做 X 的特征, 记为 $\mathrm{char}X$. 如果 X 中的所有元素的最大阶不存在, 则记为 $\mathrm{char}X=\infty$.

$\forall x\in X, 0*x\in\mathrm{SP}(X)$, 由定理 2.3.2 知 $|x|=|0*x|$. 又由定理 5.2.3 知, $\mathrm{SP}(X)$ 关于加法 $x+y=x*(0*y)$ 和乘法是一个环, 则 $0*x$ 在环 $(\mathrm{SP}(X),+,\cdot)$ 中的阶与它在 IS–代数中的阶是否一致?

将元素 x 在 IS–代数和环中的阶分别记为 $|x|_*$ 和 $|x|_+$, 以区别这两个概念.

要特别注意的是, 用 $n(0*x)$ 表示 $0*x$ 在半环 $(\mathrm{SP}(X),+,\cdot)$ 中的 n 倍.

定理 5.3.1 在 IS 代数 $(X,*,\cdot,0)$ 中, 对任意 $\forall x\in X$ 有 $0*x\in\mathrm{SP}(X)$, 并且

$$|x|_*=|0*x|_+.$$

证明 对任意 $\forall x\in X$, 由定理 3.2.13. 知 $0*x\in\mathrm{SP}(X)$. 由定理 2.3.2 知

$$|x|_*=|0*x|_*.$$

先证明对任意正整数 k 都有 $k(0*x)=0*kx$.

当 $k=1$ 时, 显然成立. 下设对 $k-1$ 有 $(k-1)(0*x)=0*(k-1)x$, 则

$$\begin{aligned}k(0*x)&=(k-1)(0*x)+(0*x)=(0*(k-1)x)*(0*(0*x))\\&=(0*(0*(0*x)))*(k-1)x=(0*x)*(k-1)x=0*kx,\end{aligned}$$

从而对任意正整数 k 都有

$$\begin{aligned}&k(0*x)=0*kx,\\&k(0*x)=0\Leftrightarrow 0*kx=0,\end{aligned}$$

故 $|0*x|_*=|0*x|_+$. 又由于 $|x|_*=|0*x|_*$, 从而 $|x|_*=|0*x|_+$. 证毕

定理 5.3.2 IS–代数 X 到环 $(\mathrm{SP}(X),+,\cdot)$ 上的映射

$$\varphi: x\to 0*x$$

是保持阶不变的同态满射.

证明 由定理 3.2.13 显然得到 φ 是满射. 对任意 $x,y\in X$, 设

$$x\to 0*x, y\to 0*y,$$

则

$$\begin{aligned}&(0*x)+(0*y)=(0*x)*(0*(0*y))=(0*x)*(0*y),\\&(0*x)(0*y)=(0*x)0*(0*x)y=0*(0*xy)=0*xy,\end{aligned}$$

故得

$$x * y \to 0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y) = (0 * x) + (0 * y),$$

$$xy \to 0 * xy = (0 * x)(0 * y),$$

所以 φ 是同态满射. 由定理 5.3.1 的证明过程知 $|x|_* = |0 * x|_*$. 证毕

定理 5.3.3 IS–代数 $(X, *, \cdot, 0)$ 的特征与环 $(\mathrm{SP}(X), +, \cdot)$ 的特征相等.

证明 对任意 $x \in X$, 设 $|x|_* = n$, 由定理 3.2.13 知 $0 * x \in \mathrm{SP}(X)$. 又由定理 5.3.1 知 $|x|_* = |0 * x|_+$.

反过来, 对任意 $0 * x \in \mathrm{SP}(X)$, 设 $|0 * x|_+ = m$, 由定理 5.3.1 知 $|x|_* = m$, 从而 IS–代数 $(X, *, \cdot, 0)$ 与环 $(\mathrm{SP}(X), +, \cdot)$ 的特征相等. 证毕

已经知道, 如果加群 G 的所有元素有最大阶 m, 则每个元素 a 的阶都是 m 的因数, 并且 $ma = 0$. 在 IS–代数中, 也有类似的结论.

定理 5.3.4 如果 IS–代数 X 的特征为 m, 则每个元素 x 的阶都是 m 的因数, 并且 $0 * mx = 0$.

证明 由于 X 的特征为 m, 则存在 $a \in X$, 使得 $|a|_* = m$ 为最大阶. $\forall x \in X$, 设 $|x|_* = n$, 由定理 2.3.9 知, $n|m$ 且 $0 * mx = 0$. 证毕

定理 5.3.5 设 X 为 IS–代数, 令

$$M = \{n | n \in \mathbf{N}, \forall x \in X, 0 * nx = 0\}.$$

(1) 当 $M = \varnothing$ 时, $\mathrm{char}X = \infty$;

(2) 当 $M \neq \varnothing$ 时, $\mathrm{char}X$ 就是 M 中的最小数.

证明 (1) 假设 $\mathrm{char}X = m$ 为有限正整数, 则存在元素 a, 使得 $|a|_* = m$ 为最大阶. 对任意 $\forall x \in X$, 设 $|x|_* = n$, 由定理 5.3.4 知 $n|m$ 且 $0 * mx = 0$, 即 $m \in M$, 矛盾, 故 $\mathrm{char}X = \infty$.

(2) 设 $M \neq \varnothing$, n 是 M 中的最小数, 由于 $\forall x \in X$, $0 * nx = 0$, 从而 $|x|_* \leqslant n$. 设 $\mathrm{char}X = m$, 故 $m \leqslant n$. 又由定理 5.3.4 知, $\forall x \in X$, $0 * mx = 0$, 从而 $m \in M$, 所以有 $n \leqslant m$, 故 $m = n$. 证毕

5.3.2 用特征刻画 IS–代数

已经知道, 无零因子环的特征具有良好的性质, 无零因子 IS–代数的特征也有类似的性质.

引理 5.3.1 在 IS–代数 X 中有

$$x(0 * ny) = 0 * n(xy) = (0 * nx)y,$$
$$(0 * nx)(0 * my) = 0 * (0 * mn(xy)).$$

证明 当 $n=1$ 时, 显然有 $x(0*y)=0*(xy)=(0*x)y$. 假设对 $n-1$ 有 $x(0*(n-1)y)=0*(n-1)xy$, 则

$$x(0*ny)=x((0*(n-1)y)*y)=x(0*(n-1)y)*(xy)$$
$$=(0*(n-1)xy)*(xy)=0*n(xy).$$

同理可得

$$(0*nx)y=0*n(xy),$$

故得

$$(0*nx)(0*my)=0*(m((0*nx)y))=0*(m(0*(n(xy))))$$
$$=0*(0*mn(xy)).$$

证毕

在以下讨论中, 设 X 为非零 IS–代数.

定理 5.3.6 在无零因子 IS–代数 X 中有

(1) X 中所有非零元的阶相同;

(2) X 的特征要么为无穷大, 要么为素数.

证明 (1) 如果存在非零元 x, 使得 $|x|_*=n$, 则 $0*nx=0$, 于是对任意非零元 y 都有

$$x(0*ny)=(0*nx)y=0y=0.$$

由于 X 无零因子, 并且 x 非零, 故 $0*nx=0$. 设 $|y|_*=m$, 则由定理 2.3.4 知 $m|n$.

另一方面, 由于 $0*my=0$, 则由引理 5.3.1 得

$$(0*mx)y=x(0*my)=x0=0,$$

但是 y 非零, 故 $0*mx=0$, 则 $n|m$, 所以 $n=m$.

(2) 设 $\mathrm{char}X=n$, 则存在 X 中的非零元 a, 使得 $|a|_*=n$. 假设 n 不是素数, 可设 $n=n_1n_2(1<n_1,n_2<n)$, 则

$$0*n_1a\neq 0,\quad 0*n_2a\neq 0,$$

但是由引理 5.3.1 知

$$(0*n_1a)(0*n_2a)=0*n_1n_2(aa)=(0*na)a=0,$$

这与 X 无零因子矛盾, 所以 n 为素数. 证毕

定理 5.3.7 IS–代数 X 是 KS–代数当且仅当 $\mathrm{char}X=1$.

证明 如果 $\mathrm{char}X=1$, 则 $\forall x\in X, |x|_*\leqslant 1$, 故 $0*x=0$, 从而 $(X,*,0)$ 是 BCK–代数, 即 $(X,*,\cdot,0)$ 是 KS–代数. 反过来, 如果 $(X,*,\cdot,0)$ 是 KS–代数, 则 $\forall x\in X, 0*x=0$, 从而 $|x|_*\leqslant 1$, 即 $\mathrm{char}X=1$. 证毕

定理 5.3.8　IS–代数 X 是拟结合的当且仅当 $\mathrm{char}X \leqslant 2$.

证明　设 X 是拟结合的, $\forall x \in X$ 有 $0*(0*x)=0*x$, 从而

$$0*2x=(0*x)*x=(0*(0*x))*x=(0*x)*(0*x)=0,$$

故 $\mathrm{char}X \leqslant 2$.

反过来, 设 $\mathrm{char}X \leqslant 2$, 即对任意 $\forall x \in X, |x|_* \leqslant 2$, 即 $(0*x)*x=0$, 从而

$$(0*(0*x))*(0*x)=0*((0*x)*x)=0.$$

又由于

$$(0*x)*(0*(0*x))=(0*(0*(0*x)))*x=(0*x)*x=0,$$

所以

$$0*(0*x)=0*x,$$

即 $(X,*,0)$ 是拟结合的, 故 $(X,*,\cdot,0)$ 是 QS–代数.　证毕

定理 5.3.9　在 IS–代数 X 中, 如果 $\forall x \in X, xx=x$, 则 X 是拟结合的.

证明　对任意 $x \in X$, 有

$$0*x=(0*x)(0*x)=0*((0*x)x)=0*(0*(xx))=0*(0*x),$$

所以 X 是拟结合的.　证毕

5.4　IS–代数的伴侣半环

在环 $(R,+,\cdot)$ 中, 取 $x-y=x+(-y)$, 由定理 5.1.3 知, $(R,-,\cdot,0)$ 是 IS–代数, 并且环 $(R,+,\cdot)$ 的理想必为 IS–代数 $(R,-,\cdot,0)$ 的理想, 所以 IS–代数可视为环概念的一般化. 由于半环也是环概念的推广, 自然希望找到 IS–代数与半环之间的联系.

事实上, 5.1 节中已经给出了 AS–代数、PS–代数、QS–代数与环和半环的关系如下:

(1) 如果 $(X,*,\cdot,0)$ 是 AS–代数, 则 $(X,*,)$ 是特征为 2 的环. 反过来, 如果 $(R,+,\cdot)$ 是特征为 2 的环, 则 $(R,+,\cdot,0)$ 是 AS–代数, 并且将 R 看成环与看成 IS–代数, 其理想是一致的.

(2) 如果 $(X,*,\cdot,0)$ 为 PS–代数, 令 $x+y=x*(0*y)$, 则 $(X,+,\cdot)$ 是环, 并且 0 为零元, $0*x$ 为 x 的负元. 反过来, 如果 $(R,+,\cdot)$ 是环, 则 $(R,-,\cdot,0)$ 是 PS–代数, 并且环 $(R,+,\cdot)$ 的理想必是 PS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 的理想.

(3) 在 QS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 中, 令 $x+y=0*(x*y)$, 则 $(X,+,\cdot)$ 是加法交换半环, 并且 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 的理想必是半环 $(X,+,\cdot)$ 的理想.

本节讨论在一般 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 中, 把以上加法统一起来, 并使 X 关于统一后的加法和原有的乘法也作成半环, 并通过它的 PS–部分来研究 IS–代数与环之间的关系.

5.4.1 概念和基本公式

先证明以下事实:

定理 5.4.1 在 IS–代数 $(X, *, \cdot, 0)$ 中, 令 $x+y=0*((0*x)*y)$, 则

(1) $x+y=y+x$;

(2) $(x+y)+z=(x+z)+y$;

(3) $(x+y)+z=x+(y+z)$;

(4) $x(y+z)=xy+xz, (x+y)z=xz+yz$.

证明 (1) $x+y=0*((0*x)*y)=0*((0*y)*x)=y+x$.

(2) $$\begin{aligned}(x+y)+z &= 0*((0*(0*((0*x)*y)))*z)\\ &= (0*((0*x)*y))*(0*z)=0*(((0*x)*y)*z).\end{aligned}$$

y, z 互换得

$$(x+z)+y=0*(((0*x)*z)*y)=0*(((0*x)*y)*z)=(x+y)+z.$$

(3) $(x+y)+z=(y+x)+z=(y+z)+x=x+(y+z)$.

(4) $$\begin{aligned}x(y+z) &= x(0*((0*y)*z))=x0*((x0*xy)*xz)\\ &= 0*((0*xy)*xz)=xy+xz.\end{aligned}$$

同理可得

$$(x+y)z=xz+yz.$$

证毕

定理 5.4.1 说明, X 关于以上运算 “+” 和原有的运算 “·” 是半环.

定义 5.4.1 在 IS 代数 $(X, *, \cdot, 0)$ 中, 令

$$x+y=0*((0*x)*y),$$

将半环 $(X, +, \cdot)$ 称为 IS–代数 $(X, *, \cdot, 0)$ 的伴侣半环.

在 AS–代数 X 中, 由于 $0*x=x$, 则有

$$x+y=0*((0*x)*y)=x*y,$$

所以 AS–代数 X 的伴侣半环就是定理 5.1.1 中特征为 2 的环.

在 PS–代数 X 中, 由于 $0*(0*x)=x$, 则有

$$x+y=0*((0*x)*y)=0*((0*x))*(0*y)=x*(0*y),$$

所以 PS–代数 X 的伴侣半环就是定理 5.1.3 中的环.

在 QS–代数 X 中, 由于 $0*(0*x)=0*x$, 则有

$$x+y=0*((0*x)*y)=(0*(0*x))*(0*y)=(0*x)*(0*y)=0*(x*y),$$

所以 QS–代数 X 的伴侣半环就是定理 5.1.5 中的半环.

可见, 定义 5.4.1 给出的伴侣半环正是 5.1 节中的环和半环的统一和推广. 另外, 在 X 的伴侣半环中, $(X, +)$ 正是 BCI–代数 X 的加法半群, 从而由定理 3.4.2 直接可得如下定理:

定理 5.4.2　在 IS–代数 X 的伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 中, $\forall x\in X$ 有

(1) $(0*x)+x=x+(0*x)=0$;

(2) $0+x\leqslant x$, 并且 $0+x=x$ 当且仅当 x 是关于 "$\leqslant$" 的极小元.

5.4.2　用伴侣半环刻画 AS–代数、PS–代数和 QS–代数

定理 5.4.3　IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 是 PS–代数当且仅当它的伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 是环.

证明　如果 $(X,*,\cdot,0)$ 是 PS–代数, 则由前面的论述知, 它的伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 中的加法为

$$x+y=x*(0*y).$$

再由定理 5.4.1 和定理 5.4.2 得

$$x+y=y+x,\quad 0+x=x,\quad x+(0*x)=0,$$

从而伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 是以 0 为零元, 以 $0*x$ 为 x 的负元的环.

如果它的伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 是环, 设 0_1 是它的零元, 则

$$0+0_1=0*(0*0_1)=0,$$

从而有

$$\begin{aligned}0_1&=0_1+0_1=0*((0*0_1)*0_1)\\&=(0*(0*0_1))*(0*0_1)=0*(0*0_1)=0,\end{aligned}$$

所以 0 是环 $(X,+,\cdot)$ 中的零元, 即 $\forall x\in X$ 有

$$0*(0*x)=0+x=x,$$

从而 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 是 PS–代数.　　证毕

定理 5.4.4　IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 是 AS–代数当且仅当它的伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 是特征为 2 的环.

证明　如果 $(X,*,\cdot,0)$ 是 AS–代数, 由于它必是 PS–代数, 则由定理 5.4.3 知, 伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 是以 0 为零元的环. 又由于 $\forall x\in X$ 有 $0*x=x$, 从而 $x+x=x*x=0$, 即环 $(X,+,\cdot)$ 的特征为 2.

如果 $(X,+,\cdot)$ 是特征为 2 的环, 则由定理 5.4.3 的证明可知, 0 为零元, 所以 $x+x=0$, 但由定理 5.4.2 可知 $(0*x)+x=x+(0*x)=0$, 所以 $x=0*x$, 故 $(X,*,\cdot,0)$ 是 AS–代数.　　证毕

定理 5.4.5　IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 是 QS–代数当且仅当它的伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 满足 $x+x=0$.

证明　如果 $(X,*,\cdot,0)$ 是 QS–代数, 则 $\forall x\in X$ 有

$$x+x=0*((0*x)*x)=(0*(0*x))*(0*x)=(0*x)*(0*x)=0.$$

反过来, $\forall x\in X$ 有 $x+x=0$, 即

$$(0*(0*x))*(0*x)=0*((0*x)*x)=x+x=0,$$

又有

$$\begin{aligned}(0*x)*(0*(0*x))&=(0*(0*(0*x)))*(0*(0*x))\\&=0*((0*(0*x))*(0*x))=0*0=0,\end{aligned}$$

所以 $0*(0*x)=0*x$, 即 $(X,*,\cdot,0)$ 是 QS 代数. 证毕

定理 5.4.6 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 的子代数必是伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 的子半环.

证明 设 A 是 $(X,*,\cdot,0)$ 的子代数, 显然, $0\in A$. $\forall a,b\in A$, 显然, $ab\in A$. 又由于 $a+b=0*((0*a)*b)\in A$, 故 A 是伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 的子半环. 证毕

5.4.3 IS–代数的 PS–部分的性质

在 5.2 节中, 将

$$\mathrm{SP}(X)=\{x\in X|0*(0*x)=x\}$$

叫做 IS–代数 X 的 PS–部分. 显然,

$$\mathrm{SP}(X)=\{x\in X|0+x=x\},$$

并且 $\mathrm{SP}(X)$ 本身是 PS–代数. 下面讨论它的性质.

定理 5.4.7 在 IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 中, $\mathrm{SP}(X)$ 是伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 中的最大环.

证明 由于 $0\in\mathrm{SP}(X)$, 所以 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的非空子集. $\forall x,y\in\mathrm{SP}(X)$ 有

$$0+x=0*(0*x)=x,\quad 0+y=0*(0*y)=y,$$

所以有

$$\begin{aligned}0+(x+y)&=0*(0*(x+y))=0*(0*(0*((0*x)*y)))\\&=0*((0*x)*y)=x+y,\end{aligned}$$

$$0+xy=0y+xy=(0+x)y=xy,$$

从而 $x+y,xy\in\mathrm{SP}(X)$, 故 $\mathrm{SP}(X)$ 是伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 的子半环.

由于 $0\in\mathrm{SP}(X)$ 且 $\forall x\in\mathrm{SP}(X)$, x 必为极小元, 由定理 5.4.2 知, $0+x=x$, 故 0 为零元, 并且 $(0*x)+x=x+(0*x)=0$, 从而 $\mathrm{SP}(X)$ 是伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 中以 0 为零元的环.

设 R 是伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 中的任意环, 与定理 5.4.3 的证明类似地可知, 0 为环 R 的零元. $\forall y\in R$ 有

$$0*(0*y)=0+y=y,$$

故 $y \in \mathrm{SP}(X)$, 即 $R \subseteq \mathrm{SP}(X)$, 故 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的伴侣半环中的最大环. 证毕

定理 5.4.8 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 中的理想.

证明 由于 $0 \in \mathrm{SP}(X)$, 所以 $\mathrm{SP}(X)$ 是 X 的非空子集. $\forall x, y \in \mathrm{SP}(X)$, 由定理 5.4.7 可知 $x+y \in \mathrm{SP}(X)$. $\forall x \in X, \forall a \in \mathrm{SP}(X)$, 由定理 4.1.2 知

$$ax = (0+a)x = 0x + ax = 0 + ax,$$

所以 $ax \in \mathrm{SP}(X)$. 同理可得 $xa \in \mathrm{SP}(X)$. 因此, $\mathrm{SP}(X)$ 是伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 的理想.

证毕

由以上讨论可见, 每个 IS–代数都有它的伴侣半环, 该半环又有一个最大环, 并且是伴侣半环的理想.

5.5 IS–代数的伴随半环

在 3.5 节中给出了 BCI–代数的伴随半群, 这里也建立 IS–代数的伴随半环的概念, 并给出它的性质.

5.5.1 概念和基本性质

在 3.5.1 小节中, 给出了 BCI–代数的伴随半群的概念如下:

设 X 是 BCI–代数, $a \in X$, 令

$$a^{-1} : x \to xa^{-1} = x * a,$$

即 $a^{-1}(x) = xa^{-1} = x * a$, 则 a^{-1} 是 X 上的自映射, 将这样的有限个自映射的合成作成的集合记为 $M(X)$. 显然, $M(X)$ 关于映射的合成运算 "$\circ$" 作成一个半群, 称之为 BCI–代数 X 的伴随半群, 记为 $(M(X), \circ)$, 也简写为 $M(X)$, 0^{-1} 是其中的幺元.

另外, 在 4.2 节中给出了如下记号:

$$(\cdots((x * a_1) * a_2) * \cdots) * a_n = x * \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

以下公式显然成立:

(1) $x(a_1^{-1} \circ \cdots \circ a_n^{-1}) = x * \sum_{i=1}^{n} a_i$;

(2) $\left(x * \sum_{i=1}^{n} a_i\right) \sigma = x\sigma * \sum_{i=1}^{n} a_i$, $\forall \sigma \in M(X)$.

已经知道, IS–代数是由 BCI–代数结构和半群结构复合而成的, 所以, 可以根据 IS–代数的乘法再定义 $M(X)$ 中的乘法.

定义 5.5.1 $\forall \sigma, \tau \in M(X)$, 设

$$\sigma = a_1^{-1} \circ \cdots \circ a_n^{-1}, \quad \tau = b_1^{-1} \circ \cdots \circ b_l^{-1},$$

规定

$$(1)\ a_1^{-1}\circ\cdots\circ a_n^{-1}=\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}, \tag{5.5.1}$$

$$(2)\ x(\sigma\tau)=x*\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}a_ib_j,\forall x\in X, \tag{5.5.2}$$

将上式给出的乘积 $\sigma\tau$ 叫做 σ,τ 的乘积.

这样一来, $M(X)$ 上带有了两种二元运算: "$\circ$", "$\cdot$". 现在讨论 $(M(X),\circ,\cdot)$ 是否可以作成一个半环.

定理 5.5.1 $\forall\sigma,\tau,\lambda\in M(X)$, 设 $\sigma=a_1^{-1}\circ\cdots\circ a_n^{-1},\tau=a_{n+1}^{-1}\circ\cdots\circ a_{n+m}^{-1}$, $\lambda=b_1^{-1}\circ\cdots\circ b_l^{-1}$, 则有

$$(1)\ \sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}\sum_{j=1}^{l}b_j^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}(a_ib_j)^{-1}, \tag{5.5.3}$$

特别地,

$$a^{-1}b^{-1}=(ab)^{-1}; \tag{5.5.4}$$

(2) $(\sigma\tau)\lambda=\sigma(\tau\lambda)$;

(3) $(\sigma+\tau)\lambda=\sigma\lambda+\tau\lambda,\lambda(\sigma+\tau)=\lambda\sigma+\lambda\tau$.

证明 $\forall x\in X$, 由式 (5.5.2) 知

$$x(\sigma l)=x*\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}a_ib_j=x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}(a_ib_j)^{-1},$$

即得

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}\sum_{j=1}^{l}b_j^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}(a_ib_j)^{-1}.$$

特别地,

$$x(a^{-1}b^{-1})=x*(ab)=x(ab)^{-1},$$

即得

$$a^{-1}b^{-1}=(ab)^{-1}.$$

由于 IS–代数中的 "$\cdot$" 适合结合律, 故以上乘法也适合结合律. 又由于 IS–代数中的 $*$ 对 $\cdot$ 适合左右分配律, 故有

$$\begin{aligned}x((\sigma\circ\tau)\lambda)&=x((a_1^{-1}\circ\cdots\circ a_n^{-1}\circ a_{n+1}^{-1}\circ\cdots\circ a_{n+m}^{-1})(b_1^{-1}\circ\cdots\circ b_l^{-1}))\\&=x*\sum_{i=1}^{n+m}\sum_{j=1}^{l}a_ib_j=\left(x*\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}a_ib_j\right)*\sum_{i=n+1}^{n+m}\sum_{j=1}^{l}a_ib_j\\&=x(\sigma\lambda\circ\tau\lambda),\end{aligned}$$

故 $(\sigma\circ\tau)\lambda=\sigma\lambda\circ\tau\lambda$. 同理可得 $\lambda(\sigma\circ\tau)=\lambda\sigma\circ\lambda\tau$.　　证毕

定理 5.5.1 表明, $(M(X),\circ,\cdot)$ 是一个半环, 并且由定理 3.5.1 知, $(M(X),\circ)$ 是交换群, 0^{-1} 是关于 $\circ$ 运算的幺元.

定义 5.5.2　设 $(X,*,\cdot,0)$ 是 IS–代数, $(M(X),\circ)$ 是 BCI–代数 $(X,*,0)$ 的伴随半群. 按式 (5.5.2) 定义了乘法后, 得到的半环 $(M(X),\circ,\cdot)$ 叫做 X 的伴随半环.

在序半群 S 中, $\forall a,b\in S$, 如果满足 $xb\leqslant a$ 的 x 有最大元, 则将这个最大元叫做 a 关于 b 的左剩余, 记为 $a:b$. 将这个概念应用到 X 的伴随半环上, 有如下定理:

定理 5.5.2　设 X 是 IS–代数, $R(X)=\{a^{-1}\,|a\in X\}$, 则 $(R(X),:,\cdot,0^{-1})$ 也是 IS–代数, 0^{-1} 为其中的零元, 并且有

$$(X,*,\cdot,0)\cong(R(X),:,\cdot,0^{-1}).$$

证明　由推论 3.5.1 知, $(R(X),:,0^{-1})$ 是 BCI–代数. $\forall a,b,c\in X$, 由定理 3.5.3 知

$$a^{-1}:b^{-1}=(a*b)^{-1},$$

再由式 (5.5.4) 得

$$\begin{aligned}x((a^{-1}:b^{-1})c^{-1})&=x((a*b)^{-1}c^{-1})=x(((a*b)c)^{-1})\\&=x((ac*ac)^{-1})=x((ac)^{-1}:(ac)^{-1})\\&=x(a^{-1}c^{-1}:b^{-1}c^{-1}),\end{aligned}$$

故得

$$(a^{-1}:b^{-1})c^{-1}=a^{-1}c^{-1}:b^{-1}c^{-1},$$

同理可得

$$c^{-1}(a^{-1}:b^{-1})=c^{-1}a^{-1}:c^{-1}b^{-1},$$

从而 $(R(X):,\cdot,0^{-1})$ 是 IS–代数.

令 $\varphi:X\to R(X)$, $a\to a^{-1}$, 由定理 3.5.3 知, φ 为同态. 由定理 3.5.2 知, φ 为双射. 设 $a\to a^{-1}$, $b\to b^{-1}$, 则

$$ab\to(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1},$$

故 $(X,*,\cdot,0)\cong(R(X),:,\cdot,0^{-1})$.　　证毕

定理 5.5.3　IS–代数 X 是 PS–代数当且仅当 X 的伴随半环 $M(X)$ 是环.

证明　由于 X 是 PS–代数当且仅当 X 是广义结合的, 又由定理 3.6.1 知, X 是广义结合的当且仅当 $(M(X),\circ)$ 是群. 由于伴随半环 $(M(X),\circ,\cdot)$ 是环当且仅当 $(M(X),\circ)$ 是群, 故 X 是 PS–代数 $\Leftrightarrow M(X)$ 是环.　　证毕

定理 5.5.4　IS–代数 X 是 PS–代数 $\Leftrightarrow\forall a,b\in X$ 有

$$a^{-1}\circ b^{-1}=(a*(0*b))^{-1}.$$

证明 X 是 PS–代数当且仅当 $(X,*,0)$ 是广义结合的. 由定理 3.6.2 知, BCI–代数 X 是广义结合的当且仅当 $\forall a,b\in X$ 有

$$a^{-1}\circ b^{-1}=(a*(0*b))^{-1}.$$

证毕

同理, 由定理 3.6.3 得如下定理:

定理 5.5.5 设 $M(X)$ 是 IS–代数 X 的伴随半环, 则 X 是 AS–代数当且仅当 $M(X)$ 是特征为 2 的环.

由定理 3.6.4 得如下定理:

定理 5.5.6 IS–代数 X 是 AS–代数当且仅当 $\forall a,b\in X$ 有

$$a^{-1}\circ b^{-1}=(a*b)^{-1}.$$

由定理 3.6.4 得如下定理:

定理 5.5.7 设 $M(X)$ 是 IS 代数 X 的伴随半环, IS–代数 X 是 QS–代数当且仅当 $\forall a,b\in X$ 有

$$a^{-1}\circ b^{-1}\leqslant_1 (0*(a*b))^{-1}.$$

由定理 5.2.3 知, IS–代数 X 的 PS–部分 SP(X) 是 X 的子代数, 并且是 PS–代数. 由定理 3.6.1 可知, 它的伴随半环 $M(\mathrm{SP}(X))$ 是环.

要特别注意的是, X 的伴随半环 $M(X)$ 中的元素 a^{-1} 是 X 上的自映射, 而 $M(\mathrm{SP}(X))$ 中的元素 a^{-1} 是 SP(X) 上的自映射, 它们是不同的概念.

定理 5.5.8 IS–代数 X 是 QS–代数当且仅当 $M(\mathrm{SP}(X))$ 是特征为 2 的环.

证明 如果 X 是 QS–代数, 则 SP(X) 既是 PS–代数又是 QS–代数, 从而必是 AS–代数. 由定理 5.5.5 知, $M(\mathrm{SP}(X))$ 是特征为 2 的环.

反过来, 如果 $M(\mathrm{SP}(X))$ 是特征为 2 的环, 则由定理 5.5.5 知, SP(X) 是 AS–代数. $\forall x\in X$, $0*x\in$SP(X), 故 $0*(0*x)=0*x$, 所以 X 是 QS–代数. 证毕

5.5.2 伴随半环的同态与同构

定理 5.5.9 设 $f:X\to\overline{X}$, $x\to\bar{x}$ 为 IS–同态, Imf 为 $\bar{X}$ 的理想, 则

$$M_f: M(X)\to M(\overline{X}),\quad u^{-1}\circ\cdots\circ v^{-1}\to\bar{u}^{-1}\circ\cdots\circ\bar{v}^{1}$$

为半环同态.

证明 由定理 3.5.10 知, M_f 是半群 $M(X)$ 到半群 $M(\overline{X})$ 的同态映射. $\forall\sigma,\tau\in M(X)$, 设 $\sigma=a_1^{-1}\circ\cdots\circ a_n^{-1},\tau=b_1^{-1}\circ\cdots\circ b_m^{-1}$, 则

$$\sigma=a_1^{-1}\circ\cdots\circ a_n^{-1}\to\bar{a}_1^{-1}\circ\cdots\circ\bar{a}_n^{-1},\quad \tau=b_1^{-1}\circ\cdots\circ b_m^{-1}\to\bar{b}_1^{-1}\circ\cdots\circ\bar{b}_m^{-1},$$

由式 (5.5.3) 和 (5.5.4) 得

$$\sigma\tau=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{m}b_j^{-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_ib_j)^{-1}$$

$$\to\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\bar{a}_i\bar{b}_j)^{-1}=\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_i^{-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\bar{b}_j^{-1}\right),$$

故 M_f 是半环 $M(X)$ 到半环 $M(\overline{X})$ 的同态映射.　证毕

推论 5.5.1　如果 IS–代数 $X\sim\overline{X}$, 则它们的伴随半环也同态.

证明　设 f 是 $X\to\overline{X}$ 的同态满射, 显然, $\mathrm{Im}f=\overline{X}$ 为 $\overline{X}$ 的理想. 由定理 5.5.9 知, M_f 是半环 $M(X)$ 到 $M(\overline{X})$ 的同态满射, 从而 $M(X)$ 与 $M(\overline{X})$ 作为半环也同态.　证毕

推论 5.5.2　如果两个 IS–代数 X 与 $\overline{X}$ 同构, 则它们的伴随半环 $M(X)$ 与 $M(\overline{X})$ 作为半群也同构.

证明　由推论 3.5.3 可知, M_f 是半群 $M(X)$ 到 $M(\overline{X})$ 的同构映射. 由定理 5.5.9 知, M_f 又是半环同态, 故 M_f 是半环同构.　证毕

5.5.3 伴随半环与伴侣半环的关系

前面已经说明, IS–代数 X 的 PS–部分 $\mathrm{SP}(X)=\{a\in X\,|\,0*(0*a)=a\}$ 的伴随半环 $M(\mathrm{SP}(X))$ 是环, 而定理 5.4.3 又说明, $\mathrm{SP}(X)$ 的伴侣半环 $(\mathrm{SP}(X),+,\cdot)$ 也是环, 这样一来, 以 IS–代数 X 为基础, 建立了两个环: $(\mathrm{SP}(X),+,\cdot)$ 和 $(M(\mathrm{SP}(X)),\circ,\cdot)$. 下面讨论它们之间的关系.

定理 5.5.10　设 X 是 IS–代数, $(\mathrm{SP}(X),+,\cdot)$ 和 $(M(\mathrm{SP}(X)),\circ,\cdot)$ 分别表示 $\mathrm{SP}(X)$ 的伴侣半环和伴随半环, 则它们是同构的环, 即

$$(\mathrm{SP}(X),+,\cdot)\cong(M(\mathrm{SP}(X)),\circ,\cdot).$$

证明　设 $f:a\to a^{-1}$, 由定理 3.6.8 知, f 是 $(\mathrm{SP}(X),+)$ 到 $(M(\mathrm{SP}(X)),\circ)$ 的同构映射.

$\forall a,b\in\mathrm{SP}(X)$, $a\to a^{-1}$, $b\to b^{-1}$, 由式 (5.5.4) 得

$$ab\to(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1},$$

故 f 是环 $(\mathrm{SP}(X),+,\cdot)$ 到环 $(\mathrm{SP}^{-1}(X),\circ,\cdot)$ 的同构映射, 从而

$$(\mathrm{SP}(X),+,\cdot)\cong(M(\mathrm{SP}(X)),\circ,\cdot).$$

证毕

定理 5.5.11　设 $(X,*,\cdot,0)$ 是 IS-代数, X 的伴侣半环为 $(X,+,\cdot)$, $\mathrm{SP}(X)$ 的伴随半环为 $(M(\mathrm{SP}(X)),\circ,\cdot)$, 则

$$f:a\to(0*(0*a))^{-1}$$

是 $(X,+,\cdot)$ 到 $(M(\mathrm{SP}(X)),\circ,\cdot)$ 的同态满射, 即

$$(X,+,\cdot)\sim(M(\mathrm{SP}(X)),\circ,\cdot),$$

且 $\ker f = \mathrm{KP}(X)$.

证明 由定理 3.6.10 知, f 为 $(X,+)$ 到 $(M(\mathrm{SP}(X)),\circ)$ 的同态满射, 且 $\ker f = \mathrm{KP}(X)$.

$\forall a,b \in X$, 设 $a \to (0*(0*a))^{-1}$, $b \to (0*(0*b))^{-1}$, 由 (5.5.4) 得

$$\begin{aligned} f(a)f(b) &= (0*(0*a))^{-1}(0*(0*b))^{-1} \\ &= [(0*(0*a))(0*(0*b))]^{-1} = [0*(0*(0b*(0b*ab)))]^{-1} \\ &= (0*(0*ab))^{-1} = f(ab), \end{aligned}$$

故 f 为 $(X,+,\cdot)$ 到 $(\mathrm{SP}(X),\circ,\cdot)$ 的同态满射. 证毕

定理 5.5.12 IS–代数 X 是 PS–代数当且仅当 X 的伴侣半环与伴随半环同构, 即 $(X,+,\cdot) \cong (M(X),\circ,\cdot)$.

证明 IS–代数 X 是 PS–代数当且仅当 BCI–代数 $(X,*,0)$ 是广义结合的. 由定理 3.6.12 知, $(X,*,0)$ 是广义结合的当且仅当 X 的加法半群与伴随半群同构, 即 $(X,+) \cong (M(X),\circ)$, 并且 $f: X \to M(X)$, $a \to a^{-1}$ 是群同态满射.

下面只要证明 f 能保持乘法即可. $\forall a,b \in X$, $a \to a^{-1}$, $b \to b^{-1}$, 由式 (5.5.4) 得

$$ab \to (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1},$$

故 f 保持乘法, 从而 f 是半环的同构映射, 即 $(X,+,\cdot) \cong (M(X),\circ,\cdot)$. 证毕

定理 5.5.13 如果 IS–代数 X 是 AS–代数, 则它的伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 和伴随半环 $(M(X),\circ,\cdot)$ 都是特征为 2 的环, 并且 $(X,+,\cdot) \cong (M(X),\circ,\cdot)$. 反过来, 如果它的伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 或者伴随半环 $(M(X),\circ,\cdot)$ 都是特征为 2 的环, 则 X 是 AS–代数.

证明 如果 $(X,*,\cdot,0)$ 是 AS–代数, 则由定理 5.4.4 知, 它的伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 是特征为 2 的环. 又由定理 5.5.12 知 $(X,+,\cdot) \cong (M(X),\circ,\cdot)$, 故 $(M(X),\circ,\cdot)$ 必是特征为 2 的环.

反过来, 如果 $(M(X),\circ,\cdot)$ 是特征为 2 的环, 则由定理 5.5.5 知, X 是 AS–代数. 如果伴侣半环 $(X,+,\cdot)$ 是特征为 2 的环, 则由定理 5.4.4 知, IS–代数 $(X,*,\cdot,0)$ 是 AS–代数. 证毕

参考文献

[1] Hungerford T W. 代数学 [M]. 冯克勤译. 长沙: 湖南教育出版社, 1985.

[2] Huang Y S. BCI-algebra[M]. Beijing: Science Press, 2006.

[3] 胡庆平. BCI–代数 [M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1987.

[4] 孟杰, 刘用麟. BCI–代数引论 [M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 2001.

[5] 谢祥云. 序半群引论 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[6] 杨子胥. 近世代数 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[7] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[8] 陈培慈. 半环理论与语言和自动机 [M]. 南昌: 江西高校出版社, 1993.

[9] Iséki K. An algebra related with a propositional calculus[J]. Proc. Japan Academy, 1966, 42: 26–29.

[10] Hu Q P, Iséki K. On BCI-algebra satisfging $(x*y)*z = x*(y*z)$[J]. Math. Seminer Notes, 1980, 8: 553–555.

[11] Hu Q P. Associative BCI-algebra (II)[J]. Journal of Nortwest Univ., 1986, 16: 12–18.

[12] Lei T D, Xi C C. p-Radical in BCI-algebras[J]. Math. Japonica, 1985, 30: 511–517.

[13] Lei T D. p-Radical and its basic properties[J]. Math. Japonica, 1985, 30: 753–756.

[14] Huang W P. On BCI-algebras and semigroups[J]. Math. Japonica, 1995, 42(1): 59–64.

[15] Huang W P. On p-semisimple part in BCI-algebras[J]. Math. Japonica, 1992, 37: 159–161.

[16] Huang W P. Nil-radical in BCI-algebras[J]. Math. Japonica, 1992, 37: 363–366.

[17] Huang W P. On BCI-algebras in which every subalgebra is an ideal[J]. Math. Japonica, 1992, 37: 645 647.

[18] Huang W P. Adjoint semigroups of BCI-algebras[J]. SET Bull Math, 1995, 19(3): 95–98.

[19] Huang W P, Sun D J. Periodic BCI-algebras and subgroups of adjoint monoids of BCI-algebras[J]. Semigroup Forum, 1998, 15: 315 320.

[20] Huang W P, Liu F. On the adjoint semigroups of p-separable BCI-algebras[J]. Semigroup Forum, 1999, 58: 317–322.

[21] Sun D J, Huang W P. The semigroups characterizations of nil BCI-algebras[J]. Suntheast Asian Bulletin of Mathematics, 2002, 26: 651–657.

[22] Xi C C. On a class of BCI-algebras[J]. Math. Japonica, 1990, 35(1): 13–17.

[23] Jun Y B, Hong S M, Roh E H. BCI-semigroups[J]. Honam Mathematical Journal, 1993, 15: 59–64.

[24] Jun Y B, Xin X L, Roh E H. A class of algebras related to BCI-algebras and semigroups[J]. Soochow Journal of Mathematics, 1998, 24(4): 309–321.

[25] Jun Y B, Roh E H, Xin X L. I-ideals generated by a set in IS-algebras[J]. Bull. Korean Math. Soc, 1998, 35(4): 615–624.

[26] Roh E H, Kim S Y, Shim W H. a&I-ideals on IS-algebras[J]. Mathematicae Japonicae, 2001, 53(1): 107–111.

[27] Yang W Q. Two rings in IS-algebras[C]. Research on number theory and Smarandache notions, 2009.

[28] Yang W Q. The adjoint semiring part of IS-algebras[C]. Research on number theory and Smarandache notions, 2010.

[29] 陈培慈. 加法可逆半环的同态基本定理 [J]. 江西师范大学学报 (自然科学版), 1994, 18(2): 134–139.

[30] 姜广浩, 王戈平. 偏序集上的局部极大理想 [J]. 徐州师范大学学报 (自然科学版), 2006, 24(1): 11–14.

[31] 王颂生. 加法可换半环上同余及其商半环 [J]. 江西师范大学学报 (自然科学版), 1998, 22(3): 222–225.

[32] 祝清顺, 青天福. 关于序半群的核 [J]. 信息工程大学学报, 2008, 9(4): 492–493.

[33] 田振际, 王宇, 金颖勤. 几类特殊半群与理想 [J]. 兰州理工大学学报, 2007, 33(1): 146–147.

[34] 蔡光兴. 半群同余与 L(R)–关系 [J]. 湖北工学院学报, 1995, 10(2): 67–71.

[35] 欧启通, 邓火娣. 半环的双理想 [J]. 辽宁科技大学学报, 2009, 32(9): 225–229.

[36] 郑碧霞. 关于半环的同态、同构定理 [J]. 福建广播电视大学学报, 2001, 3: 49–53.

[37] 蒲义书, 陈露. BCI–代数中的几种理想 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2003, 19(1): 53–56.

[38] 朱怡权. BCI–代数的诣零性 [J]. 黄冈师专学报, 1993, 13(2): 5–7.

[39] 谢平. BCI– 代数中诣零元问题的研究 [J]. 汉中师范学院学报, 2000, 18(1): 13–16.

[40] 许彪. BCI–代数的右理想及理想 BCI–代数 [J]. 四川轻化工程学院学报, 1998, 11(3.4): 35–37.

[41] 张富林. BCI–代数中元素的阶数 [J]. 陕西师范大学学报 (自然科学版), 1995, 23(3): 111–112.

[42] 张富林. 关于可换 BCK–代数的一个注记 [J]. 榆林高专学报, 1993, 1: 49–50.

[43] 刘方. BCI–代数的交换理想与固执理想 [J]. 陕西师范大学学报 (自然科学版), 1997, 25(2): 17–19.

[44] 孟杰, 辛小龙. BCI–代数原子的特征 [J]. 西北大学学报 (自然科学版), 1991, 21(4): 14.

[45] 林大华. BCI–代数中元素的周期 [J]. 福建师范大学学报 (自然科学版), 1991, 7(3): 5–9.

[46] 张小红, 彭久麒. BCI–代数的一类理想子代数 [J]. 四川师范大学学报 (自然科学版), 1992, 15(3): 13–16.

[47] 费秀梅, 高建华, 张海芳. 关于 p–半单 BCI–代数的一点注记 [J]. 甘肃联合大学学报 (自然科学版), 2009, 23(3): 37–39.

[48] 孙大军, 黄文平. 关于 BCI–代数伴随半群中的可逆元 [J]. 纯粹数学与应用数学, 1997, 13(2): 114–117.

[49] 黄文平, 李继成. BCI–代数的理想与其伴随半群序滤子的关系 [J]. 陕西师范大学学报 (自然科学版), 1994, 22(3): 1–3.

[50] 雷天德. 广义结合 BCI–代数 [J]. 纯粹数学与应用数学, 1985, 1: 98–102.

[51] 郝成功. BCI–代数的 BCK–部分与广义结合部分 [J]. 山西大学学报 (自然科学版), 1984, 4: 10–15.

[52] 辛小龙. IS–代数的中国剩余定理 [J]. 西北大学学报 (自然科学版), 2001, 31(6): 473–475.
[53] 杨闻起. BCI–代数的进一步周期性 [J]. 西安石油大学学报, 2010, 25(5): 96–98.
[54] 杨闻起. BCI–代数的伴随代数和 a–伴随代数 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(3): 585–588.
[55] 杨闻起. BCI–代数的拟伴随代数 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2006, 24(2): 178–181.
[56] 杨闻起. BCI–代数的加法序半群的理想 [J]. 西安石油大学学报, 2011, 26(6): 105–107.
[57] 杨闻起. 由一般 BCI–代数生成的可换半群 [J]. 河南科学, 2009, 27(1): 18–21.
[58] 杨闻起. BCI–代数的拟结合部分的性质 [J]. 绍兴文理学院学报, 2005, 25(10): 21–23.
[59] 杨闻起. 可生成环与半环的 IS–代数 [J]. 兰州大学学报 (自然科学版), 2007, 43(5): 88–90.
[60] 杨闻起. IS–代数的特征数 [J]. 山东大学学报 (自然科学版), 2011, 46(4): 53–56.
[61] 杨闻起. IS–代数中理想的分解 [J]. 西北大学学报 (自然科学版), 2003, 33(4): 372–375.
[62] 杨闻起. IS–代数的伴侣半环 [J]. 山东大学学报 (自然科学版), 2011, 46(12): 66–69.

索　引